

# Grupo fractal e suas aplicações na natureza

## *The fractal group and its applications in the nature*

**Luís Roberto Almeida Gabriel Filho**

Mestre em Matemática Universidade Federal de São Carlos e Docente na FAI

**Camila Pires Cremasco Gabriel**

Mestre em Matemática Universidade Federal de São Carlos e Docente na FAI

**Odivaldo José Seraphim**

Livre Docente em Eletrificação Rural - Docente do Programa de Pós Graduação em Energia na Agricultura da Unesp de Botucatu

**Ângelo Cataneo**

Livre Docente em Informática Aplicada a Agricultura - Docente do Programa de Pós Graduação em Energia na Agricultura da Unesp de Botucatu

**Luiz Roberto Almeida Gabriel**

Livre Docente em Matemática - Docente do Programa de Pós Graduação em Energia na Agricultura da Unesp de Botucatu

### Resumo

O mundo científico tem verificado recentemente o advento de uma nova teoria: os fractais. Ao procurar uma palavra que melhor descrevesse as formas irregulares e a nova geometria que podemos classificar como intrínseca da natureza, o matemático polonês Benoit Mandelbrot, que hoje trabalha na IBM de Nova York, se deparou com o adjetivo latino *fractus*, vindo do verbo *frangere*, que significa quebrar, fraturar. Fractais são objetos que apresentam auto-semelhança e complexidade infinita, ou seja, sempre contém cópias, aproximadas ou não, de si mesmos, e são gerados pela iteração de processos simples. A geometria Euclidiana apresenta dimensões bem definidas e quantidades para a natureza, ou seja: 0, para um ponto; 1, para uma linha reta; 2, para um plano e 3, para um volume. Já a Geometria Fractal mostra infinitas possibilidades, com as dimensões podendo apresentar números fracionários, o que permite o ajuste bem melhor às condições naturais. Por outro lado, um conjunto não vazio  $G$  é um grupo em relação a uma operação pré-definida se, e somente se, valem as propriedades associativa, existência do elemento neutro e existência do elemento simétrico. Os objetivos desse trabalho são classificar cada fractal como sendo um grupo; estabelecer propriedades para os respectivos sub-grupos que mostraremos serem fractais; e representar formas ou fenômenos da natureza realizados pelos fractais e também pelos subgrupos fractais gerados.

## Palavras-chave

Fractais, grupos, fenômenos da natureza.

## Abstract

The scientific world has recently verified the advent of a new theory: the fractals. When looking for a word that better described the irregular forms and the new geometry that we can classify as intrinsic in the nature, the Polish mathematician Benoit Mandelbrot, that today works in IBM of New York, if came across with the Latin adjective fractus, come of the verb frangere, that it means to break. Fractal is objects that present self-similarity and infinite complexity, or either, always contains copies, approach or not, of itself same, and is generated by the iteration of simple processes. Euclidean geometry presents well definite dimensions and amounts for the nature, or either: 0, for a point; 1, for a line straight line; 2, for a plan and 3, a volume. Already Fractal Geometry shows to infinite possibilities, with the dimensions being able to present fractionary numbers, what it well better allows the adjustment to the natural conditions. On the other hand, a set not empty  $G$  is a group in relation to the one daily pay-define operation if, and only if, valley the properties associative, existence of the neutral element and existence of the symmetrical element. The objectives of this work are to classify each fractal as being a group; to establish properties for the respective sub-groups that we will show to be fractal; e to also represent forms or phenomena of nature carried through the fractal and the generated fractal sub-groups.

## Key words

Fractal, groups, phenomena of the nature.

## Introdução

Fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo recursivo, que apresentam auto-similaridade e complexidade infinita, ou seja, sempre contém cópias, aproximadas ou não, de si mesmos, e são gerados pela iteração de processos simples. Os fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes, não existindo uma aparência consensual.

A complexidade infinita neste caso seria uma propriedade que significa que nunca conseguiremos representá-los completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita; e sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores. A autosimilaridade indica que um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior. Um pequeno pedaço é similar ao todo. Visto em diferentes escalas a imagem de um fractal parece similar.

A geometria euclidiana lida com formas suaves: círculos, elipses e triângulo. A maioria dos objetos que temos à nossa volta é irregular, enquanto a geometria euclidiana comporta objetos suaves, geometria esta que muitas vezes impossibilita a descrição de fenômenos irregulares e complicados. A Geometria Fractal mostra infinitas possibilidades em relação à determinação das dimensões fractais, que ao contrário da dimensão Euclidiana dada aos objetos hoje conhecidos, podem ser fracionadas, o que permite um melhor ajuste frente às condições naturais.

A geometria fractal pode ser utilizada para descrever diversos fenômenos na natureza, onde não é possível a aplicação de geometrias tradicionais, bem como árvores, crescimento de populações, vasos sanguíneos, dentre outros. Segundo Benoit Mandelbrot, “Núvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta”.

Inicialmente, as plantas e as nuvens foram classificadas como fractais, descoberta esta que mostram

que estas estruturas não eram complicadas. Atualmente, estão surgindo na área de engenharia grandes aplicações. Grandes estradas americanas onde existem paredes construídas para diminuir o som emitido pelos automóveis são pouco efetivas. Para resolver tal problema, criou-se uma superfície fractal que absorve melhor o som produzido do que as paredes usadas antes. Feito isto, a companhia francesa Colas passou a fabricar e vender tal produto idealizado na superfície referida. Também uma das maiores produtoras de cimento do mundo, a Lafarge, estuda a estrutura do concreto, que é fractal, e tem feito um concreto mais durável e leve.

Segundo Benjamin Franklin, "As pequenas causas têm, às vezes, grandes efeitos: a falta de um prego perdeu a ferradura, a falta da ferradura perdeu a montaria, a falta da montaria perdeu o cavaleiro".

## Materiais e métodos

Neste trabalho, utilizaremos, como material, as definições e observações a seguir.

**Definição 1:** A dimensão Hausdorff-Besicovitch  $d$  de um fractal é obtida através da fórmula

$$p = \left(\frac{1}{t}\right)^d \quad \text{ou} \quad d = \frac{\log(p)}{\log\left(\frac{1}{t}\right)},$$

onde  $p$  é número de pedaços relativos em cada iteração fractal entre uma iteração anterior e posterior; e  $t$  é o tamanho relativo entre uma iteração anterior e posterior.

As propriedades de um fractal são: (F1) auto-similaridade, (F2) complexidade infinita, (F3) formação através de um processo de realimentação, e (F4) possuir dimensão fractal. Deste ponto em diante, consideremos  $G$  um conjunto não vazio munido da operação  $*$ .

**Definição 2:** Dizemos que um conjunto é um grupo em relação a  $*$ , que denotamos  $(G, *)$  se:

- (a)  $a*(b*c) = (a*b)*c, \forall a, b, c \in G$ , isto é, vale a propriedade associativa;
- (b) existe  $e \in G$  de maneira que  $a*e = e*a = a, \forall a \in G$ , ou seja, existe elemento neutro;
- (c) todo elemento de  $G$  é simetrizável em relação à lei considerada, ou seja,  $\forall a \in G, \exists a' \in G \mid a*a' = a'*a = e$ .

**Definição 3:** Dizemos que um conjunto  $\bar{G} \subset G$  é um subgrupo se  $\bar{G}$  é fechado em relação à operação  $*$ ; e  $\bar{G}$  é um grupo em relação à operação induzida sobre  $\bar{G}$  pela operação  $*$ .

**Definição 4:** Se  $G$  atender todas as condições acima, dizemos ainda que é um grupo abeliano se: (d)  $a*b = b*a, \forall a, b \in G$ , isto é, vale a propriedade comutativa

**Definição 5:** Dados dois grupos  $(G, *)$  e  $(J, \Delta)$ , dizemos que uma aplicação  $f: G \rightarrow J$  é um homomorfismo de  $G$  em  $J$ , se  $(\forall a, b \in G) (f(a*b) = f(a) \Delta f(b))$ .

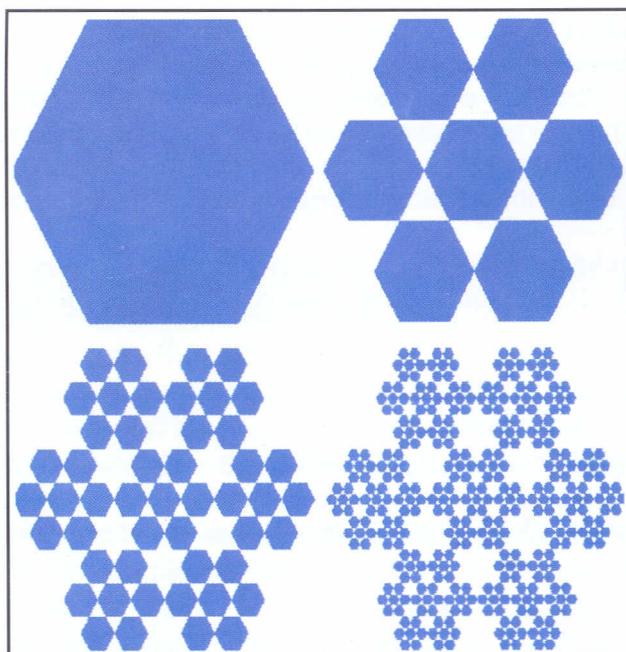
**Definição 6:** Dados dois grupos  $(G, *)$  e  $(J, \Delta)$ , dizemos que uma aplicação  $f: G \rightarrow J$  é um isomorfismo do grupo  $G$  no grupo  $J$  se  $f$  é bijetora e é um homomorfismo de grupos.

**Definição 7:** Se  $G$  é um grupo multiplicativo, dado  $a \in G$  define-se potência  $m$  ésimas de  $a$ , para todo inteiro  $m$  da seguinte maneira: se  $m \geq 0$ , por recorrência da seguinte forma  $a^0 = e$  (elemento neutro de  $G$ );  $a^m = a^{m-1} * a$ , se  $m \geq 1$ ; e se  $m < 0$ , por  $a^m = (a^{-m})^{-1}$ .

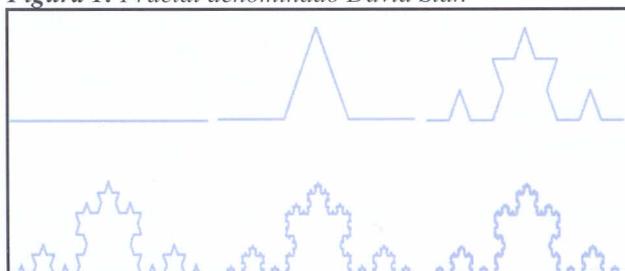
**Definição 8:** Um grupo multiplicativo  $G$  se denomina grupo cíclico se existe um elemento  $a \in G$ , que denominamos gerador de  $G$ , de maneira que  $G = \{a^m : m \in \mathbb{Z}\}$  ou denotando  $G = [a]$ .

A metodologia utilizada será a de classificar cada fractal como um conjunto no qual é possível fazer operações ou iterações com seus elementos; relações estas cujas propriedades permitiram classificá-lo como um grupo.

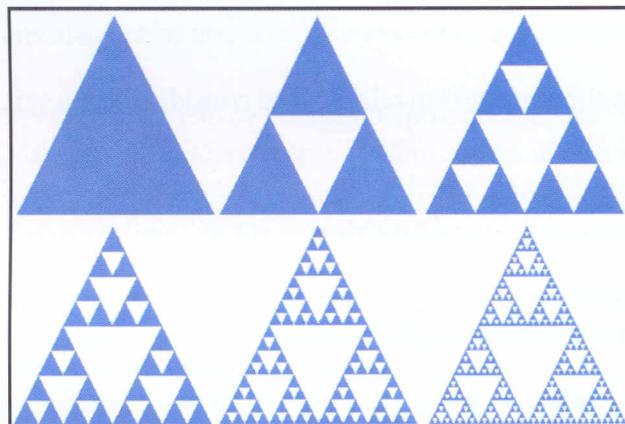
A seguir, alguns dos fractais mais conhecidos.



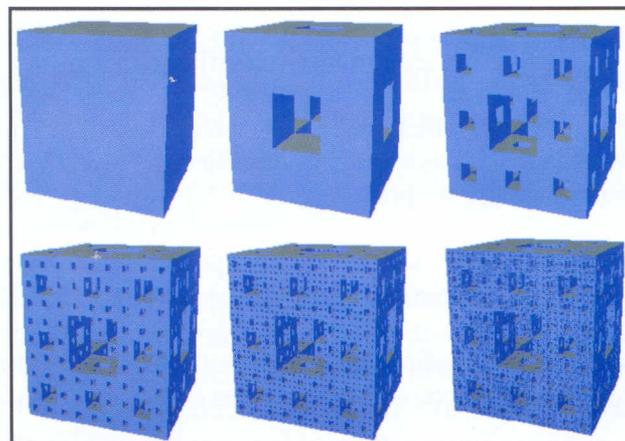
*Figura 1: Fractal denominado David Star.*



*Figura 2: Fractal denominado Curva de Koch (ou floco de neve).*



*Figura 3: Fractal denominado Triângulo de Sierpinsky.*



*Figura 4: Fractal denominado Esponja de Sierpinsky, encontrado em certos tipos de samambaias ou em moléculas de hemoglobina.*

## Resultados

Vamos agora encontrar a dimensão fractal dos fractais citados na metodologia.

**(i)** Para o fractal David Star, temos que  $p = 7$  e  $t = 1/3$ , e desta forma sua dimensão fractal é  $d = 1,77$ , pois:

$$d = \frac{\log(7)}{\log\left(\frac{1}{1/3}\right)} = \frac{\log(7)}{\log(3)} = 1,77$$

**(ii)** Para a Curva de Koch, temos que  $p = 4$  e  $t = 1/3$ , e desta forma sua dimensão fractal é  $d = 1,26$ , pois:

$$d = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{1}{1/3}\right)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1,26$$

**(iii)** Para o Triângulo de Sierpinsky, temos que  $p = 3$  e  $t = 1/2$ , e desta forma sua dimensão fractal é  $d = 1,58$ , pois:

$$d = \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{1}{1/2}\right)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1,58$$

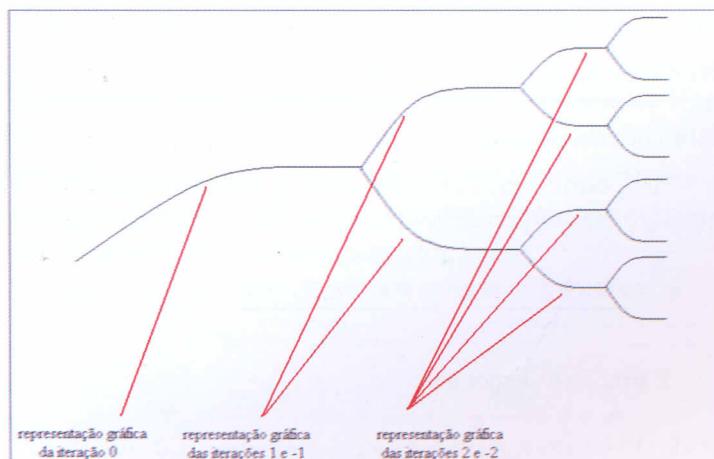
**(iv)** Para a Esponja de Sierpinsky, temos que  $p = 20$  e  $t = 1/3$ , e desta forma sua dimensão fractal é  $d = 2,72$ , pois:

$$d = \frac{\log(20)}{\log\left(\frac{1}{1/3}\right)} = \frac{\log(20)}{\log(3)} = 2,72$$

Suponhamos agora que exista uma lei de repetição  $a_i$ . Podemos aplicar essa lei  $n$  vezes dado um valor inicial, e dizemos que foi efetuado  $n$  iterações. A partir de uma dada lei, podemos obter o valor retornado  $a_i$  de cada iteração  $i \in N$ . Se  $i < 0$ , vamos definir  $a_i = a_{|i|}$ . Para a lei  $a_i = 2^i$ , com  $i \in N$  e considerando a metodologia acima para  $i < 0$ , obtemos a tabela e a figura a seguir. Note que as iterações 2 e -2 retornam o mesmo valor 4 e a representação gráfica também coincide. Porém, ressaltamos que essas iterações não são iguais.

INTERAÇÃO	RESULTADO
-3	$a_{-3} = 8$
-2	$a_{-2} = 4$
-1	$a_{-1} = 2$
0	$a_0 = 1$
1	$a_1 = 2$
2	$a_2 = 4$
3	$a_3 = 8$

**Tabela 1:** Algumas iterações de .

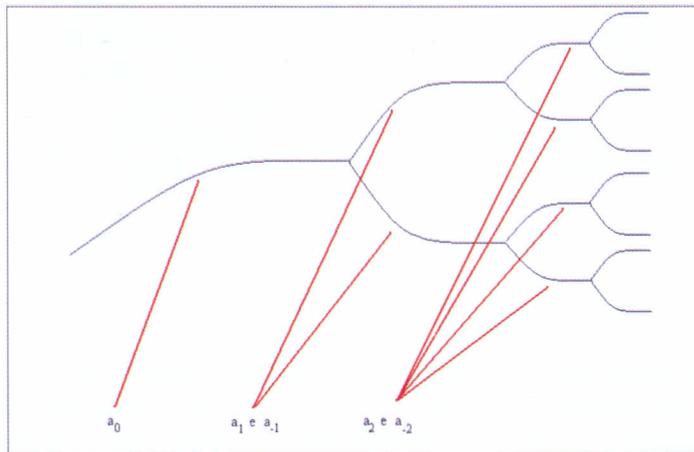


**Figura 5:** Algumas iterações de  $a_i$  graficamente.

Consideremos agora uma lei de repetição onde cada elemento é uma figura (ramificação), conforme indicado na tabela e figura a seguir. Dado que  $a_0=1$  ramificação, temos que  $a_i=2^i$  ramificações. Isto configura o Sistema de Bifurcação, que é um fractal.

$a_2$	$a_1$	$a_0$	$a_1$	$a_2$

**Tabela 2:** Algumas iterações de  $a_i$  pertinentes ao Sistema de Bifurcação.



**Figura 6:** Sistema de Bifurcação.

Assumimos daqui em diante, como termos iguais “iteração  $i$ ” e “ $g_i$ ”. Logo, podemos dizer que  $a_i$  é o resultado que  $g_i$  retornou através da lei de repetição. Vamos convencionar que  $a_i$  pode ser todo o sistema de bifurcação até o passo  $i$ . Adotaremos a mesma convenção para  $g_i$ .

**Teorema 1:** Sejam  $G$  o conjunto de todas as iterações efetuadas para a formação de um fractal qualquer, isto é,  $G = \{g_i, i \in \mathbb{Z}\}$ ; e  $\otimes$  uma operação definida da forma  $g_r \otimes g_s = g_{r+s}$ , onde  $r, s \in \mathbb{Z}$ . Então  $G$  é um grupo abeliano e  $G = [g]$ , onde  $g = g_1$ .

**Demonstração**

As propriedades (i) associativa; (ii) existência do elemento neutro; (iii) existência do elemento simétrico; e (iv) comutativa são satisfeitas. De fato,

(iii)  $\forall g_r \in G, \exists (g_r)^{-1} = g_{-r} \in G \mid g_r \otimes g_{-r} = g_{r+(-r)} = g_0 = g_{(-r)+r} = g_{-r} \otimes g_r$

(iv)  $\forall r, s \in \mathbb{Z}, g_r \otimes g_s = g_{r+s} = g_{s+r} = g_s \otimes g_r$

Mostremos agora que  $G = [g]$ , onde  $g = g_1$ . Primeiramente, notemos que  $g^n = g_n$ . De fato, seja  $e$  o elemento neutro da operação  $\otimes$ . Se  $n = 0$ , então  $g^n = g^0 = e = g_0 = g_n$ . Se  $n > 0$ , temos que:

$$g^n = \underbrace{g \otimes g \otimes g \dots \otimes g}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{g_1 \otimes g_1 \otimes g_1 \dots \otimes g_1}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{g_{1+1+1 \dots +1}}_{n \text{ vezes}} = g_n$$

E para  $n < 0$ , temos que:

$$g^n = (g^{-n})^{-1} = \underbrace{(g \otimes g \otimes g \dots \otimes g)^{-1}}_{-n \text{ vezes}} = \underbrace{(g_1 \otimes g_1 \otimes g_1 \dots \otimes g_1)^{-1}}_{-n \text{ vezes}} = \underbrace{(g_{1+1+1 \dots +1})^{-1}}_{-n \text{ vezes}} = (g_{-n})^{-1} = g_n$$

Então  $G = \{g_n : n \in Z\} = \{g^n : n \in Z\}$ , ou seja,  $G$  é um grupo cíclico, onde o gerador é  $g$ . Portanto,  $G = [g]$ .

**Observação 2:**  $G$  é o conjunto que dá origem a cada fractal, sendo dada a lei de repetição que gera o mesmo. É conveniente perceber que  $g^n = g \otimes g \otimes g \otimes \dots \otimes g$  ( $n$  vezes) e  $g_n$  é a iteração.

**Definição 9:** Definimos  $nZ = \{n \cdot x \mid x \in Z\}$  como o conjunto dos inteiros múltiplos de  $n$ .

**Definição 10:** Definimos o conjunto  $G^n$  (interações múltiplas de  $n$ ) da forma  $G^n = [g^n]$ . Por decorrência da definição, temos que:

$$G^n = [g^n] = \left\{ (g^m)^n : m \in Z \right\} = \left\{ g^{m \cdot n} : m \in Z \right\} = \left\{ g^h : h \in nZ \right\}$$

**Teorema 2:** A aplicação  $f: Z \rightarrow G$ , dada por  $f(m) = g^m, \forall m \in Z$ , é um isomorfismo do grupo aditivo  $Z$  no grupo  $G$ . **Demonstração:**

$$(i) f(m+n) = g^{m+n} = g^m \cdot g^n = f(m) \cdot f(n), \forall m \in Z;$$

$$(ii) N(f) = \{m \in Z \mid g^m = e\} = \{0\}, \text{ pois } g^m = e = g^0 \Rightarrow m = 0;$$

$$\text{Dado } g^r \in G, \exists h = r \in Z \mid f(h) = f(r) = g^r.$$

**Teorema 3:** A aplicação  $f: nZ \rightarrow G^n$ , dada por  $f(m) = g^m, \forall m \in nZ$ , é um isomorfismo do grupo aditivo  $Z$  no grupo  $[g]$ . **Demonstração.**

$$(i) f(m+h) = g^{m+h} = g^m \cdot g^h = f(m) \cdot f(h), \forall m, h \in nZ;$$

$$(ii) N(f) = \{m \in Z \mid g^m = e\} = \{0\}, \text{ pois } g^m = e = g^0 \Rightarrow m = 0;$$

$$(iii) \text{Dado } g^r \in G^n, \exists h = r \in nZ \mid f(h) = f(r) = g^r.$$

O conjunto  $G^m$  é o conjunto de iterações múltiplas de  $m$ . Essas iterações podem retornar resultados que formam um fractal, diferente do fractal gerado por  $G$ .

**Teorema 4:** A dimensão Hausdorff-Besicovitch do fractal  $G^n$  é a mesma do fractal  $G$ , ou seja, a dimensão fractal é invariante em relação aos subgrupos  $G^n$  de  $G$ .

### Demonstração

Seja  $d$  a dimensão Hausdorff-Besicovitch do fractal  $G$  e  $d_n$  a dimensão Hausdorff-Besicovitch do fractal  $G^n$ . Se  $p$  é número de pedaços relativos em cada iteração fractal entre uma iteração anterior e posterior; e  $t$  é o tamanho relativo entre uma iteração anterior e posterior, então  $p^n$  será o número de pedaços relativos em cada iteração fractal entre uma iteração anterior e posterior; e  $t^n$  será o tamanho relativo entre uma iteração anterior e posterior. Logo,

$$d_n = \frac{\log(p^n)}{\log\left(\frac{1}{t^n}\right)} = \frac{n \cdot \log(p)}{n \cdot \log\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{\log(p)}{\log\left(\frac{1}{t}\right)} = d$$

**Análise e discussão**

Pelos resultados obtidos, podemos verificar que para o fractal dado pela figura a seguir (Figura 7), temos pedaços relativos em cada iteração fractal entre uma iteração anterior e posterior; sendo que o tamanho relativo entre uma iteração anterior e posterior é  $1/4$ . Logo, sua dimensão é:

$$\frac{\log(9)}{\log(1/4)} = 1,58$$

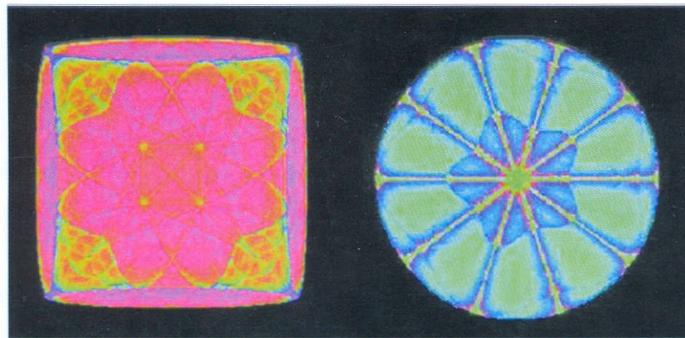
Este resultado já era esperado devido ao Teorema acima, e visto que este fractal é o subgrupo  $G^2$  do grupo fractal  $G$  Triângulo de Sierpinsky, cuja dimensão fractal também é  $d = 1,58$ .



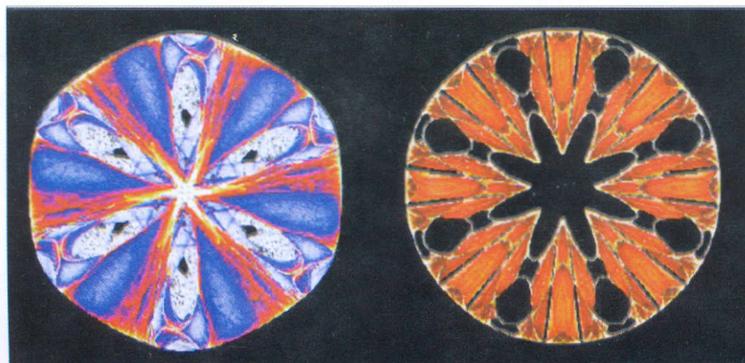
**Figura 7:** Subgrupo  $G^2$  do Grupo Fractal Triângulo de Sierpinsky.

Modelagem dinâmica discreta é a arte de modelar fenômenos que mudam com o tempo. Em um sistema dinâmico, um ponto do futuro depende do ponto presente. Como exemplos, podemos citar o tamanho de uma população, problemas genéticos, problemas de economia ou até quantidades de uma substância em uma reação química.

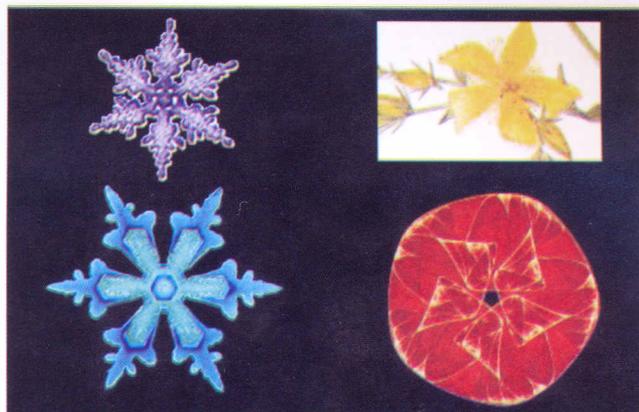
A notação usual é da forma  $g_{n+1} = f(g_n)$ , onde  $f$  é uma função qualquer e  $g$  como referido anteriormente. A seguir, ilustramos alguns exemplos de fractais gerados através de fórmulas de recursão como a descrita acima. Pelos resultados obtidos, é possível criar diversos outros fractais ou subgrupos dos grupos fractais abaixo.



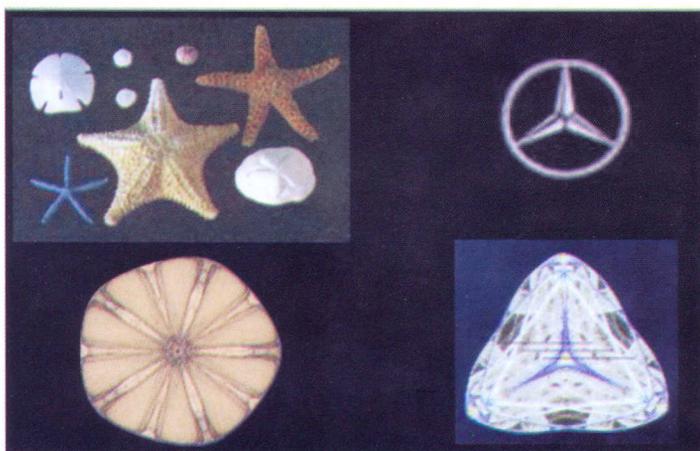
**Figura 8:** Fractais gerados a partir da lei  $f(z) = [k_1 + k_2|z|^2 + k_3 \cdot \text{Re}(z^3)]z + k_4z^{-n-1}$ , onde  $k_i \in \mathfrak{R}$  são constantes, com  $i = 1,2,3,4$ , e  $z \in \mathbb{C}$ .



**Figura 9:** Fractais gerados a partir da lei  $f(z) = [k_1 + k_2|z|^2 + k_3 \cdot \text{Re}(z^3)]z + k_4z^{-n-1}$ , onde  $k_i \in \mathfrak{R}$  são constantes, com  $i = 1,2,3,4$ , e  $z \in \mathbb{C}$ .



*Figura 10: Imagens reais da natureza semelhantes a alguns fractais conhecidos.*



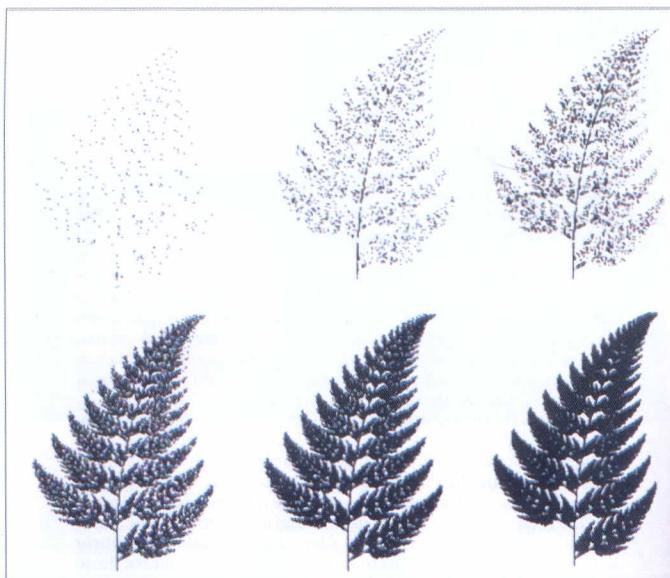
*Figura 11: Outras imagens reais da natureza semelhantes a alguns fractais conhecidos.*

Vários fractais representam fielmente um dado acontecimento caótico que, em geral, parecem não existir uma “lógica” ou uma lei / regra de formação. Um dos grandes campos de estudo nesta área é a modelagem destes fenômenos para descobrir propriedades antes desconhecidas de tal fenômeno, que possivelmente podem ser representados pelos fractais.

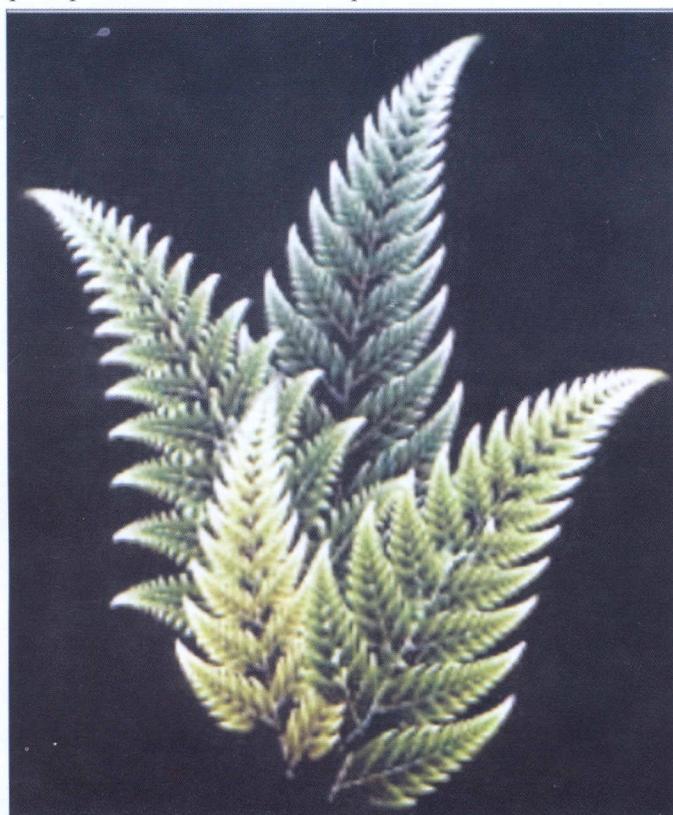
Abaixo, também mostramos atratores ou fractais que são utilizados na descrição de fenômenos de vários fatos.



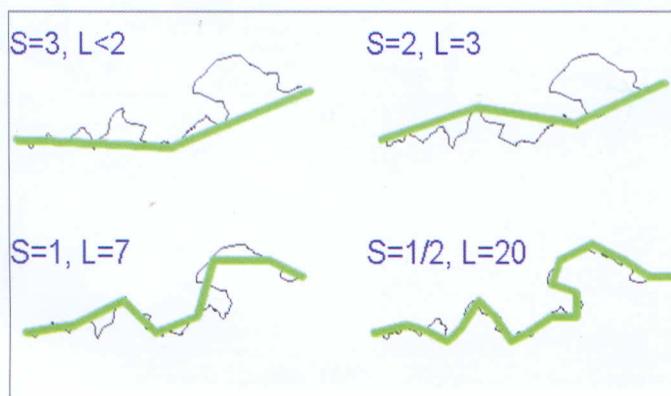
*Figura 12: Fractais gerados por diferentes processos de iteração.*



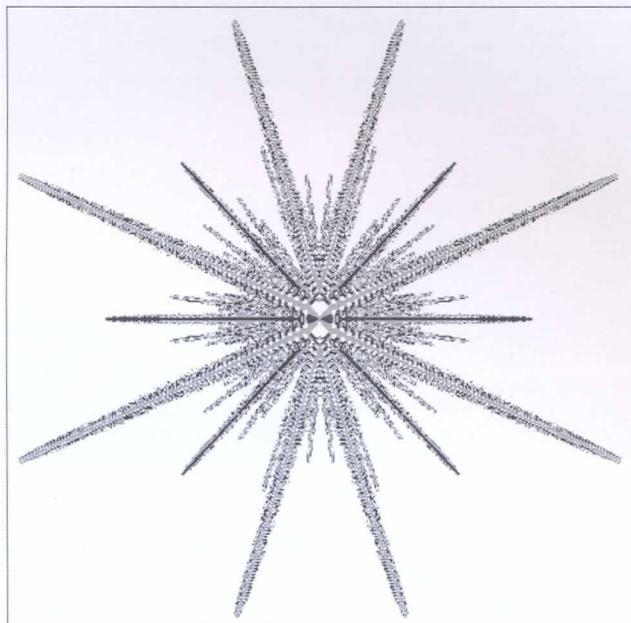
**Figura 13:** Fractal gerado por um processo simples de iteração que representar um ramo de um pinheiro.



**Figura 14:** Plantas nativas são classes que podemos comparar aos fractais no intuito de encontrar propriedades intrínsecas.



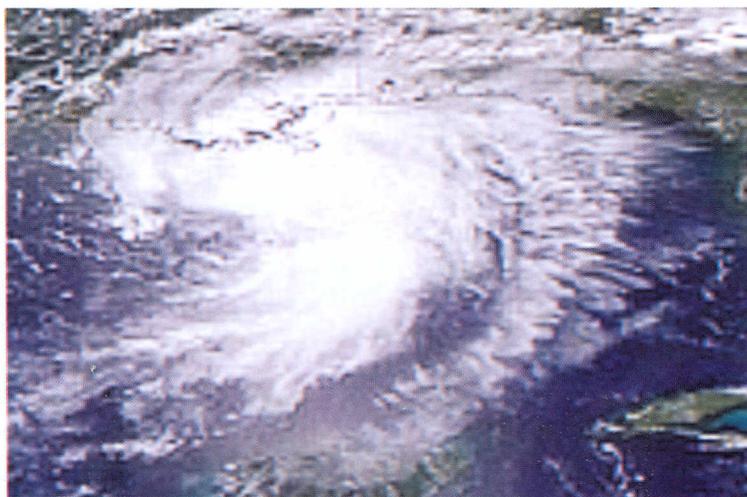
**Figura 15:** Margens de costas litorâneas modeladas por fractais.



**Figura 16:** Fractal que modela ou representa um floco de neve (ver também a Curva de Koch).

Tal quais os terremotos, que são medidos pela escala Richter, os furacões também são classificados. Com base na intensidade, a escala Saffir-Simpson classifica o fenômeno em números de 1 a 5, baseado no potencial de destruição esperado. A velocidade é o fator determinante da escala. O Katrina, que alagou Nova Orleans e parte do sul dos Estados Unidos no final de agosto, era da categoria 5, a mais forte de todas - com ventos superiores a 249 km/h. Foi o quarto da categoria no país desde que os furacões começaram a ser medidos. O último havia sido o Andrew, que matou pelo menos 43 pessoas em 1992, na Flórida.

Furacões podem ser modelados através de fractais, outra aplicação deste brilhante campo de estudo.



**Figura 17:** Furacão Cindy em julho de 2005 (Fonte: Nasa).

Também pode-se modelar raios e relâmpagos através de sistemas simples semelhantes ao Sistema de Bifurcação, que é um fractal.

Estas adaptações são feitas ou alterando o número de bifurcações, ou usando a teoria de grupos e subgrupos fractais desenvolvidos neste trabalho.



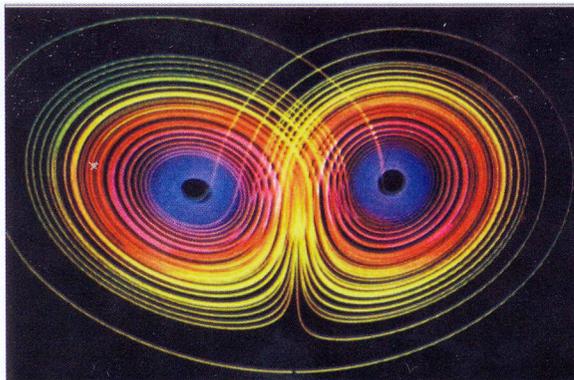
*Figura 18: Raios e relâmpagos cortam o céu de Henderson, Nevada.*

Agora, apresentamos algumas simulações de sistemas discretos clássicos que representam alguns fractais. Em geral, considera-se uma função  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  e o sistema discreto  $a_{n+1} = f(a_n)$ . Em alguns destes modelos fizemos adaptações a partir de um modelo contínuo para um modelo discreto.

Edward Lorenz foi um dos precursores desta ciência caótica quando descobriu o que chamou de efeito borboleta, ou seja, a dependência sensível que um fenômeno tem pelas condições iniciais. O primeiro passo para a descoberta desta nova abordagem científica aconteceu quando ele pesquisava a previsão do clima através de um programa computacional para realizar simulações climáticas. Ele alimentava as equações com dados iniciais das condições climáticas e em seguida o programa começava a produzir gráficos de previsão climática.

Para a surpresa de Lorenz, quando seu computador teve que realizar uma seqüência de simulações climáticas e necessitando de dados iniciais, ao invés de inserir seis casas decimais, usou apenas três casas por achar que os milésimos decimais não afetariam significativamente o resultado. Para a sua surpresa, o gráfico começava sem nenhuma diferença do anterior, mas em determinado ponto ele se diferenciava drasticamente revelando que as condições iniciais determinam sensivelmente os resultados, ou seja, as três casas decimais que ele achou que não seriam importantes foram responsáveis por uma mudança completa na simulação. Em 1972, Lorenz lançou um artigo de grande repercussão intitulado “*Previsibilidade: o bater de asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas?*”, artigo este apresentado em 1972 em um congresso em Washington.

O atrator (fractal) criado por Lorenz é uma representação de um sistema de equações diferenciais autônomo. É um sistema dinâmico que, em princípio, foi idealizado para a compreensão de fenômenos meteorológicos. Se determinado o atrator, temos que suas infinitas trajetórias nunca se cortam, e também se pode provar que apresenta auto similaridade características dos fractais. O modelo atmosférico que faz uso do sistema de Lorenz consiste em uma atmosfera bidimensional retangular, cujo extremo inferior está a uma temperatura maior que a superior. Desta maneira, o ar quente fará aumentar a variável  $y$ , enquanto o ar frio fará abaixar, criando correntes que farão uma troca de calor por convecção. As variáveis envolvidas dependem unicamente do tempo e representam o fluxo convectivo, a distribuição de temperatura horizontal e a distribuição de temperatura vertical.



*Figura 19: Fractal denominado Atrator de Lorenz.*

Este atrator não difere muito do Atrator de Lorenz, sendo um pouco mais simples. Foi descoberto por Otto Rössler ao estudar oscilações em reações químicas, chegando a um modelo que tinha um comportamento caótico para certos valores dos parâmetros de reação. Utilizando o software Matlab obtemos a figura seguinte.

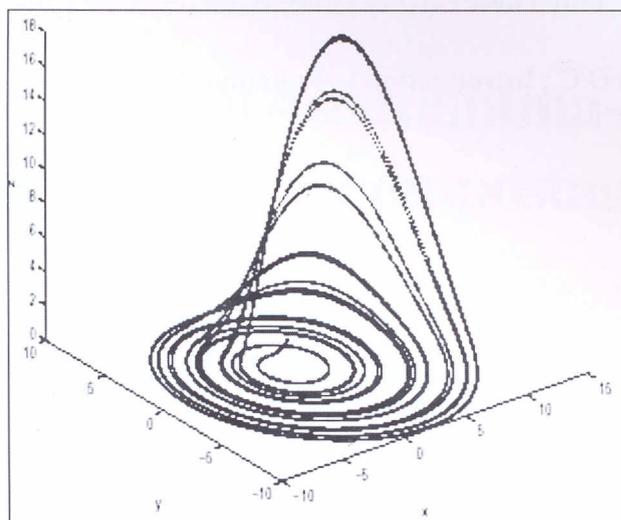


Figura 20: Atrator de Rössler Discreto.

## Conclusão

A partir deste trabalho, será possível realizar operações com estágios de iterações de formação de um fractal. A partir desta lei, os fractais foram classificados como sendo grupos cíclicos abelianos; e seus subgrupos gerados a partir de iterações múltiplas também são fractais. Também provamos que a dimensão fractal destes grupos e seus respectivos subgrupos acima citados são iguais, isto é, a dimensão fractal é invariante em relação a estes grupos e subgrupos.

Os subgrupos criados podem representar fractais diferentes do fractal que gerou o grupo descrito, e desta forma representar outras formas ou fenômenos da natureza antes não realizados pelos fractais pré existentes, retornando propriedades antes não constatadas destes objetos de estudo.

## Referências

- DOMINGUES, H.H.; **Álgebra moderna**. Editora Atual, São Paulo, 1979.
- GABRIEL FILHO, L.R.A.; **Comportamento assintótico de sistemas não lineares discretos**. Dissertação de Mestrado, São Carlos, 2004.
- HALE, J.K. e KOÇAK, H.; **Dynamics and Bifurcations**. Texts in Applied Mathematics, Springer - Verlag, v. 3., 1991.
- HARTMAN, P.; **Ordinary Differential Equations**. Wiley, 1964.
- KATO, T.; **Perturbation Theory for Linear Operators**. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer - Verlag, v. 132., 1976.
- LASALLE, J.P.; **The Stability and Control of Discrete Processes**. Applied Mathematical Sciences, Springer - Verlag, v. 62, 1986.

- LIMA, E.L.; **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária, IMPA - Rio de Janeiro, 1998.
- MANDELBROT, B.B.; **The fractal geometry of nature**. Editora Freeman, New York, 1983.
- MANDELBROT, B.B.; **Objectos Fractais**. Editora Gradiva, New York, 1983.
- TAYLOR, A.E. e LAY, D.C.; **Introduction to Functional Analysis**. John Wiley & Sons - New York, 1980.