



Faculdades Adamantinenses Integradas (FAI)

www.fai.com.br

MENEZES, Isabella Barbosa; DUARTE, Marco Aparecido Queiroz; SILVA, Willian Carvalho; KIKUTI, Hamilton; NOGUEIRA, Nadia Rodrigues. Interpolação Spline usada no cálculo da altura da cana-de-açúcar. Revista Omnia Exatas, v.3, n.1, p.17-25, 2010.

INTERPOLAÇÃO SPLINE USADA NO CÁLCULO DA ALTURA DA CANA-DE-AÇÚCAR

SPLINE INTERPOLATION USED IN THE SUGARCANE HEIGHT COMPUTATION

Isabella Barbosa Menezes

Graduanda em Matemática – UEMS - Cassilândia-MS

Marco Aparecido Queiroz Duarte

Prof. Doutor – Curso de Matemática - UEMS – Cassilândia – MS

Willian Carvalho da Silva

Graduando em Matemática – UEMS - Cassilândia-MS

Hamilton Kikuti

Prof. Doutor – Curso de Agronomia - UEMS – Cassilândia – MS

Nadia Rodrigues Nogueira

Graduanda em Agronomia – UEMS - Cassilândia-MS

RESUMO

Este trabalho apresenta a teoria da interpolação spline aplicada à análise do crescimento da cana-de-açúcar. Com o objetivo de verificar a precisão desta técnica de interpolação no problema estudado, inserindo pontos em intervalos com extremos conhecidos ou calculando valores que já foram obtidos em medidas reais. Estudos sobre cana-de-açúcar são importantes devido à expansão das usinas de açúcar e álcool por todo o Brasil.

Palavras-chave: Interpolação. Splines. Cana-de-açúcar.

ABSTRACT

This work presents the spline interpolation theory applied to the analysis of the growth of sugarcane. With the objective of verifying the precision of this interpolation technique in the studied problem, inserting points in intervals with known ends or calculating values that already obtained in real measures. Studies on sugarcane are important due to the expansion of the sugar and alcohol mills in Brazil.

Key-words: Interpolation. Splines. Sugarcane.

INTRODUÇÃO

A interpolação é um método utilizado para estimar valores de uma função dentro de um intervalo conhecido, isto é, tendo um conjunto de dados tabelados, podemos inserir pontos entre os mesmos. Conhecendo os respectivos conjuntos de dados $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, ou seja, $(n+1)$ pontos, podemos obter o polinômio interpolador $P(x)$, que por sua vez passa por estes mesmos pontos. O grau de $P(x)$ será no máximo n , porém dependerá do número de pontos que se pretende interpolar e da precisão que se almeja (RUGGIERO e LOPES, 1997; SPERANDIO, MENDES e SILVA, 2003).

Ruggiero e Lopes evidenciam o papel da interpolação: Interpolar uma função $f(x)$, consiste em aproximar essa função por outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe de algumas propriedades. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$. A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como quando são conhecidos somente valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado (RUGGIERO e LOPES, 1997).

A interpolação é aplicável na resolução de problemas como: crescimento populacional, na resolução de problemas físicos, computacionais e entre outros.

O grau do polinômio interpolador depende muito do número de pontos conhecidos e do número de pontos que se quer interpolar. Porém, um polinômio de grau elevado pode causar extrapolação dos valores de $f(x)$ no intervalo interpolação. Por isso, às vezes por maior que seja o número n de pontos conhecidos, o polinômio interpolador deve ser obtido usando poucos pontos conhecidos na vizinhança do ponto que se pretende interpolar.

A Figura 1 ilustra uma situação em que o polinômio interpolador extrapola os valores de $f(x)$.

Um método de interpolação que usa poucos pontos para obter o polinômio interpolador é a interpolação por Spline, sendo esta função denotada por $S_p(x)$, onde seu grau é p , tendo os pontos x_i , com $i = 0, 1, \dots, n$.

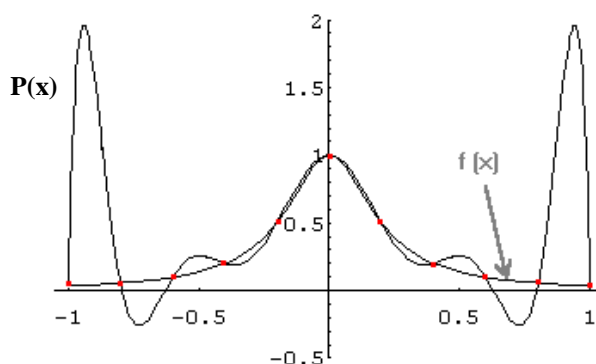


Figura 1 – Função $f(x)$ e seu polinômio interpolador $P(x)$

Como podemos observar na Figura 1, nas situações em que o número de pontos de interpolação é grande, a aproximação obtida com um polinômio de grau elevado é dominada pelos erros de arredondamento. Sendo que isso nos sugere uma interpolação por Spline, ou seja, uma interpolação por partes.

Este trabalho apresenta o método de interpolação por splines e o aplica ao problema de crescimento de cana-de-açúcar (*Saccharum spp*) com dois tipos de adubação, com e sem polímeros. A aplicação no crescimento da cana-de-açúcar é feita devido a grande expansão das usinas de álcool e açúcar em todo o Brasil.

Funções Spline em Interpolação

Os primeiros estudos sobre Splines foram feitos por Euler (1707-1783) e outros autores, mas no início do século XX R. Courant (1943) e I. Shoemberg (1946) formularam estudos mais detalhados sobre Splines, que chegaram aos dias de hoje. Em geral, a teoria de splines foi desenvolvida a partir das necessidades práticas de aproximação (SCHEID, 1991).

As funções splines devem atender 4 condições:

- 1) Dividimos o intervalo $[x_0, x_n]$ em subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, com $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$ e a cada subintervalo teremos uma aproximação polinomial diferente, obtendo assim $S_p(x)$, um polinômio de grau p , sendo este definido por:

$$S_p(x) \equiv \begin{cases} s_0(x), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ s_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

- 2) O intervalo $[a, b]$ é o denominador da função $S_p(x)$
- 3) $S_p(x)$ deve ser contínua e possuir derivadas contínuas até ordem $(p - 1)$, em $[a, b]$
- 4) $S_p(x_i) = f(x_i)$, com $i = 0, 1, \dots, n$.

Spline Linear Interpolante

Para que seja possível realizar a interpolação é necessário conhecer $(n + 1)$ pontos distintos, sendo estes pontos também chamados de nós.

Esta interpolação por spline linear é dada por $S_1(x)$, nos pontos x_0, x_1, \dots, x_n e nos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ como:

$$s_i(x) = f(x_{i-1}) \cdot \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (1)$$

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Definição:

- a) $S_1(x)$ é polinômio de grau 1 em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$;
- b) $S_1(x)$ é contínua em (x_{i-1}, x_i) , onde:

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = f(x_i) \Rightarrow S_1(x)$$
 é contínua em $[a, b]$, portanto $S_1(x)$ é uma spline linear.
- c) $S_1(x)$ é spline linear interpolante de $f(x)$ nos nós x_0, x_1, \dots, x_n .

A Figura 2 ilustra o caso da aproximação de uma função por spline linear. Observando a Figura 2, vemos que $S_1(x)$ é contínua dentro do intervalo definido, porém não é derivável em todo o intervalo. Então vemos que a aproximação por spline linear mesmo sendo muito utilizada não é a mais adequada, pois além de não ser derivável em todo o intervalo, $S_1(x)$ ainda sofre mudanças bruscas quando se passa de um subintervalo para outro.

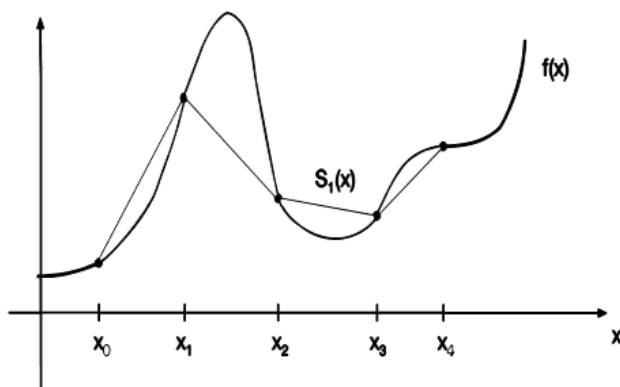


Figura 2 –
função por Spline

Aproximação de uma
linear

Spline Cúbica Interpolante

Uma spline cúbica, $S_3(x)$ é muito usada pois possui derivada primeira e segunda contínuas, que a torna numa curva suave e sem mudanças nas curvas de um subintervalo para outro (CUNHA, 2000).

Uma spline cúbica $S_3(x)$ é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte, $s_k(x)$, é um polinômio de grau 3, definida num intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Suponha $f(x)$ dada por x_i , com $i = 0, 1, \dots, n$, onde existem n polinômios de grau 3, $S_3(x)$.

$S_3(x)$ deve satisfazer 5 condições:

- 1) $S_3(x) = S_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 0, 1, \dots, n$;
- 2) $S_3(x_i) = f(x_i)$, com $i = 1, 2, \dots, n$;
- 3) $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n-1)$;

$$4) s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k), k = 1, 2, \dots, (n-1);$$

$$5) s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k), k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Deste modo, podemos escrever:

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k \quad (2)$$

$$k = 1, 2, \dots, (n - 1).$$

Assim, para obter a equação (2) devemos determinar 4 coeficientes, a_k , b_k , c_k e d_k , para cada k .

A condição (1) é satisfeita de imediato pois $S_3(x)$ é spline interpolante nos respectivos nós x_0, \dots, x_n .

Para a condição (2) temos:

$$s_k(x_k) = d_k = f(x_k) \quad (3)$$

às quais devemos acrescentar mais a equação

$$s_k(x_k) = f(x_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a_k h_k^3 + b_k h_k^2 - c_k h_k + d_k = f(x_k) \quad (4)$$

sendo $h_k = x_k - x_{k-1}$, com $k = 1$.

A condição (3) é satisfeita através das $(n-1)$ equações: para $k = 1, 2, \dots, (n-1)$, $s_{k+1}(x_k) = f(x_k)$, isto é:

$$-a_{k+1} h_{k+1}^3 + b_{k+1} h_{k+1}^2 - c_{k+1} h_{k+1} + d_{k+1} = f(x_k) \quad (5)$$

Para que condições (4) e (5) sejam verdadeiras, temos que encontrar as derivadas da equação (2).

Então:

$$s'_k(x) = 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k \quad (6)$$

$$s''_k(x) = 6a_k(x - x_k) + 2b_k \quad (7)$$

Quando $x = x_k$ temos $s''_k(x) = 2b_k$. E assim, o coeficiente b_k é dado por:

$$b_k = \frac{s''_k(x)}{2} \quad (8)$$

Para $x = x_{k-1}$ temos

$$s''_k(x_{k-1}) = -6a_k h_k + 2b_k h_k$$

Daí, temos

$$a_k = \frac{2b_k - s''_k(x_{k-1})}{6h_k} = \frac{s''_k(x_k) - s''_k(x_{k-1})}{6h_k}$$

Pela condição (5),

$$s''_k(x_{k-1}) = s''_{k-1}(x_{k-1}),$$

obtemos então:

$$a_k = \frac{s''_k(x_k) - s''_{k-1}(x_{k-1})}{6h_k} \quad (9)$$

Pra obter c_k , usamos as equações (3) e (4), da seguinte forma:

$$c_k = \frac{-f(x_{k-1}) - a_k h_k^3 + b_k h_k^2 + d_k}{h_k}$$

Como $d_k = f(x_k)$ então,

$$c_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - (a_k h_k^2 + b_k h_k) =$$

$$= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \frac{s''_k(x_k) - s''_k(x_{k-1})}{6} h_k + \frac{s''_k(x_k)}{2} h_k$$

Chegando a

$$c_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \frac{-2s''_k(x_k)h_k - s''_{k-1}(x_{k-1})h_k}{6} \quad (10)$$

Fazendo $s''_k(x_k) = g_k$ e $f(x_k) = y_k$ temos:

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k} \quad (11)$$

$$b_k = \frac{g_k}{2} \quad (12)$$

$$c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1} h_k}{6} \quad (13)$$

$$d_k = y_k \quad (14)$$

Pela condição (4), $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ onde a partir da equação (5) teremos

$$s'_k(x_k) = c_k = 3a_{k+1}h_{k+1}^2 - 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}$$

Donde

$$c_{k+1} = c_k - 3a_{k+1}h_{k+1}^2 + 2b_{k+1}h_{k+1}$$

e, usando (11), (12) e (13)

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_{k+1}g_{k+1} + g_k h_{k+1}}{6} =$$

$$= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1} h_k}{6} - 3 \left(\frac{g_{k+1} - g_k}{6} \right) h_{k+1} + 2 \left(\frac{g_{k+1} h_{k+1}}{2} \right)$$

Após agrupar os termos semelhantes para $k = 1, 2, \dots, (n-1)$, chega-se a equação (15)

$$h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}g_{k+1} = 6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right) \quad (15)$$

A equação (15) pode ser representada na forma matricial $Ax = b$. Onde temos a matriz incógnita $x = (g_0, g_1, \dots, g_n)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & & & h_n \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n+1)}$$

e

$$b = 6 \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}_{(n-1) \times 1}$$

Com essa solução, podemos então determinar a_k , b_k , c_k e d_k para cada $s_k(\bar{x})$.

Na resolução do sistema mencionado acima, é necessário impor 3 condições, apresentadas a seguir (SPERANDIO, MENDES e SILVA, 2003):

1ª) Spline Natural \Rightarrow nos extremos, $S_3(x_0)$ é aproximadamente linear.

$$s''_3(x_0) = g_0 = 0 \quad \text{e} \quad s''_3(x_n) = g_n = 0.$$

2ª) Nos extremos, $S_3(x)$, é aproximadamente parábola.

$$g_0 = g_1 \text{ e } g_n = g_{n-1}.$$

3ª) Nos extremos, são dadas as inclinações I_0 e I_n para $S_3(x)$, levando as duas equações adicionais:

$$S'_3(x_0) = I_0 \Rightarrow s'_1(x_0) = I_0 \Rightarrow 3a_1h_1^2 - 2b_1h_1 + c_1 = I_0$$

e

$$S'_3(x_n) = I_n \Rightarrow s'_n(x_n) = c_n = I_n$$

A Cana-de-açúcar no Brasil

A cana – de – açúcar (*Saccharum sp.*) é originária no sudeste da Ásia, foi introduzida no Brasil em 1522, por Martinho Afonso de Souza (CASTRO e KLUGE, 2001). A cana-de-açúcar foi implantada inicialmente nos estados do nordeste e atualmente é a região Centro-Sul que se destaca com uma área total cultivada de aproximadamente 7,16 milhões ha, sendo a responsável por 87,4% da produção nacional (UNICA, 2009). Fertilizantes (N e P) revestidos com polímeros supostamente podem permitir a redução das doses da adubação recomendada para plantio em 50%, principalmente pela liberação gradativa dos nutrientes ao solo, aumentando sua eficiência de utilização pelas plantas (MELLO et al., 2008).

Neste trabalho são analisadas as alturas médias do plantio de dois blocos de cana-de-açúcar, um com adubação comum e o outro com revestimento de polímeros. O objetivo aqui é apenas usar splines para calcular alturas em datas dentro do intervalo de tempo observado e verificar a precisão da interpolação spline em relação aos valores conhecidos. Os blocos de cana passaram a ser observados a partir de 90 dias de plantio com intervalos de 30 dias até completar 210 dias.

RESULTADOS

As Tabelas 1 e 2 apresentam os valores observados da altura média da cana-de-açúcar a partir de 90 dias de plantio adubada sem e com revestimento de polímeros, respectivamente. Foram feitos dois tipos de interpolação entre os dados apresentados nas duas Tabelas, o primeiro interpola os valores para T=105 dias e T=165 dias com o objetivo de verificar se as alturas obtidas se mantêm no intervalo observado, o segundo, primeiro interpola os valores T=130 dias e T=170 dias, aí uma nova tabela para cada tratamento é criada com subintervalos de amplitude h=40 dias e nessas tabelas são interpolados os valores T=120 dias, T=150 dias e T=180 dias para verificar o erro entre os dados reais exibidos nas Tabelas 1 e 2 e os valores obtidos pela interpolação spline.

Tabela 1- Altura média da cana-de-açúcar com adubação sem revestimento de polímeros

Tempo(dias)	90	120	150	180	210
Altura média(cm)	27,14	34,60	46,40	53,20	77,30

Tabela 2 - Altura média da cana-de-açúcar com adubação com revestimento de polímeros

Tempo(dias)	90	120	150	180	210
Altura média(cm)	28,8	28,6	62,8	75,4	83,1

Na interpolação de T=105 na Tabela 1 a spline cúbica interpolante encontrada foi

$$s_1(x) = 6,7 \cdot 10^{-5}(x - 120)^3 + 6,06 \cdot 10^{-3}(x - 120)^2 + 3,6987 \cdot 10^{-1}(x - 120) + 34,6$$

e foi obtido $s_1(105) = 30,19\text{cm}$.

Para interpolar T=165 também na Tabela 1 foi obtida a spline cúbica interpolante

$$s_2(x) = 2,9 \cdot 10^{-4}(x - 180)^3 + 1,636 \cdot 10^{-2}(x - 180)^2 + 5,56915 \cdot 10^{-1}(x - 180) + 53,2$$

Obtendo $s_3(165) = 49,06\text{cm}$.

Os valores obtidos para T=105 e T=165 se mantêm nos intervalos observados na Tabela 1.

Para interpolar T=130 na Tabela 1 foi usada a spline cúbica interpolante

$$s_2(x) = -1,76 \cdot 10^{-4}(x - 150)^3 - 9,8 \cdot 10^{-3}(x - 150)^2 + 2,585 \cdot 10^{-1}(x - 150) + 46,4$$

tendo então $s_2(130) = 38,72\text{cm}$, dentro do intervalo esperado.

Para interpolar T=170 a spline é a mesma usada para T=165 e o valor obtido é $s_3(170) = 49,98\text{cm}$, também dentro do intervalo esperado. A Tabela 3 apresenta o novo conjunto de valores para a adubação sem polímeros.

Tabela 3 – Novo conjunto de dados para adubação sem revestimento de polímeros

Tempo(dias)	90	130	170	210
Altura média(cm)	27,14	38,72	49,98	77,30

Para interpolar T=120, T=150 e T=180 na Tabela 3 obtemos $s_1(120) = 36,52\text{cm}$, $s_2(150) = 42,9\text{cm}$ e $s_3(180) = 54,83\text{cm}$, respectivamente. Comparando esses valores com os respectivos valores da Tabela 1 temos os seguintes erros absolutos $E(120) = 1,92\text{ cm}$, $E(150) = 3,5\text{cm}$ e $E(180) = 1,63\text{cm}$, cujos erros percentuais são 5,26%, 7,54% e 2,97%, respectivamente.

No primeiro intervalo da Tabela 2 a altura é praticamente constante, por isso os pontos para T=105 e T=165 são interpolados usando a spline linear e os valores obtidos foram $s_1(105) = 28,7\text{cm}$ e $s_3(165) = 69,1\text{cm}$, ambos dentro dos intervalos de alturas esperados.

Os pontos para T=130 e T=170 também foram obtidos por spline linear dando $s_2(130) = 50,47\text{cm}$ e $s_3(170) = 71,2\text{cm}$, também dentro dos intervalos de alturas esperados. Assim, temos um novo conjunto de valores para a adubação com revestimento de polímeros, apresentados na tabela 4.

Tabela 4 – Novo conjunto de dados para adubação com revestimento de polímeros

Tempo(dias)	90	130	170	210
Altura média(cm)	28,80	50,47	71,20	83,10

A interpolação de pontos na Tabela 4 pode ser feita por meio de spline cúbica, pois as alturas estão bem espaçadas em cada subintervalo. Para interpolar T=120 a spline cúbica obtida é:
 $s_1(x) = 1,17 \cdot 10^{-5}(x - 130)^3 + 1,41 \cdot 10^{-3}(x - 130)^2 + 5,7931 \cdot 10^{-1}(x - 130) + 50,47$,
 Levando a $s_1(120) = 44,8\text{cm}$.

Para T=150 temos

$$s_2(x) = -6,17 \cdot 10^{-5}(x - 170)^3 - 6 \cdot 10^{-3}(x - 170)^2 + 4,76 \cdot 10^{-1}(x - 170) + 71,2$$

e obtemos $s_2(150) = 68,34\text{cm}$.

Na interpolação de T=180 temos

$$s_3(x) = 5 \cdot 10^{-5}(x - 210)^3 + 2,1762 \cdot 10^{-1}(x - 210) + 83,1$$

obtendo $s_3(180) = 75,22\text{cm}$.

Na interpolação dos dados na tabela 4 tivemos os seguintes erros absolutos, $E(120) = 16,2\text{ cm}$, $E(150) = 5,54\text{cm}$ e $E(180) = 0,18\text{cm}$, com erros percentuais são 56,64%, 8,82% e 0,24%, respectivamente.

As interpolações dos pontos $T=105$ e $T=165$ nos dados das Tabelas 1 e 2 mostraram que a interpolação por spline é eficiente, pois todos os valores foram mantidos nos intervalos esperados. Quando há uma diferença considerada entre os extremos do subintervalo estudado pode-se usar uma spline cúbica na interpolação, caso contrário deve-se usar uma spline linear, como no caso da Tabela 2. A interpolação dos pontos conhecidos $T=120$, $T=150$ e $T=180$ nas Tabelas 3 e 4 também foram satisfatórias, pois com exceção de $T=120$ na Tabela 4, todos os outros resultaram em erros menores que 10% o que é considerado excelente segundo (ÚNICA, 2009). O fato da obtenção de um erro tão grande para $T=120$ na Tabela 4 se justifica pelo fato de que praticamente não existe diferença entre $T=90$ e $T=120$ na Tabela 2 e também pela amplitude $h=40$ usada, se tivéssemos uma amplitude menor o erro também seria menor.

Embora os resultados apresentados sejam considerados bons, a interpolação por spline não serve para prever valores fora do intervalo conhecido. Para isso devemos usar algum método de ajuste de curvas, por exemplo, o método dos quadrados mínimos (CUNHA, 2000).

CONCLUSÕES

Neste trabalho aplicamos o método de interpolação por spline ao problema da análise do crescimento da cana-de-açúcar, com os objetivos de verificar alturas em datas não observadas no experimento e a verificação das diferenças entre valores conhecidos e os mesmos valores obtidos pela interpolação spline. Nos dois casos o método de interpolação usado mostrou-se satisfatório, pois na maioria dos pontos interpolados os erros absolutos e percentuais foram relativamente baixos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CASTRO, P. R. C.; KLUGE, R. A. (Eds.). **Ecofisiologia de culturas extrativas**. Cana-de-açúcar, seringueira, coqueiro, dendezeiro e oliveira. Cosmópolis: Stoller do Brasil, 2001. 138p.
- CUNHA, M. C. C, “**Métodos Numéricos**”, Editora da UNICAMP, Campinas, 2000.
- MELO, L. A. F.; SILVA, D.S.; CARNEVALE, A. B.; CABACINHA, C. D.; CUNHA, S. C. **Polimerizados podem reduzir a adubação nitrogenada e fostatada no algodoeiro**. Congresso Brasileiro do Algodão, junho de 2008.
- RUGGIERO, M. A. G, LOPES, V. L. R, “**Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais**”, Makron Books, São Paulo, 1996.
- SCHEID, F, “**Análise Numérica**”, Editora McGraw-Hill de Portugal, 1991.
- SPERANDIO, D, MENDES, J. T, SILVA, L. H. M, “**Cálculo Numérico – Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos**”, Prentice Hall, São Paulo, 2003.
- União da Agroindústria Canavieira de São Paulo – UNICA. **A alta competitividade canavieira do Estado de São Paulo**. Disponível em: http://www.unica.com.br/pages/agroindustria_alta.asp. Acesso em out/2009.