O TEOREMA DE FOURIER NO ESTUDO DA EQUAÇÃO DO CALOR SUJEITA A CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO HOMOGÊNEAS

FOURIER'S THEOREM IN THE STUDY OF THE HEAT EQUATION SUBJECT TO INHOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS

Balbino Nunes de Farias Junior
Bolsista de Iniciação Científica da FAPESP
Departamento de Matemática, Estatística e Computação, FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP
balbinojunior@yahoo.com.br

Suetônio de Almeida Meira
José Roberto Nogueira
Departamento de Matemática, Estatística e Computação, FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP
e-mail: smeira@fctunesp.br; jrnog@fct.unesp.br

RESUMO

O estudo das Equações Diferenciais começa com a criação do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII, e é guiado, inicialmente, por suas aplicações à mecânica de partículas. Nessas aplicações, o uso de leis físicas, como as três leis de Newton da Dinâmica e a lei da gravitação universal, possibilita obter equações diferenciais que representam os fenômenos em estudo. Entretanto as equações resultantes trazem sérias dificuldades matemáticas em sua resolução. Uma equação básica que já surge nos estudos dos matemáticos do século XVIII é a equação do calor. Para esse problema, a obtenção de soluções satisfazendo, além da equação diferencial, a certas condições iniciais ou condições de fronteira é uma tarefa difícil. Esse é no entanto, o objetivo central desse trabalho.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Séries de Fourier, Equação do Calor.

ABSTRACT

The study of differential equations begins with the creation of differential and integral calculus in the seventeenth century, and is guided initially by its applications to particle mechanics. In these applications, the use of physical laws, such as Newton's three laws of dynamics and the law of universal gravitation, enables to obtain equations that represent the phenomena under study. However the resulting equations bring serious mathematical difficulties in resolution. A basic equation that has emerged in studies of the eighteenth century mathematicians is the heat equation. For this problem, obtain solutions satisfying addition to the differential equation, the initial conditions or boundary conditions is a difficult task. This is, however, the central objective of this work.

Key-words: Partial Differential Equations, Fourier Series, Heat Equation.

INTRODUÇÃO

O estudo das Equações Diferenciais Parciais tem merecido uma grande atenção de vários matemáticos nas últimas décadas, principalmente em fenômenos relativos à Física, em particular à Mecânica Clássica, que serviu como motivação principal para o estudo das Equações Diferenciais.

O presente trabalho tem como foco principal estudar as técnicas de resolução analítica de equações diferenciais parciais utilizando o método das séries de Fourier para a resolução da equação do calor que é definida por equações diferenciais parciais,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

onde $u = u(x,t), x, t \in \mathbb{R}, t > 0$ e α^2 é uma constante. Ou ainda, representada como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u \qquad (2)$$

em dimensões maiores, onde $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n, t > 0$ e Δ é o laplaciano em $\mathbb{R}^n$ (nas variáveis espaciais $x_1,...,x_n$).

Um estudo introdutório das equações diferenciais parciais é desenvolvido, explorando a resolução analítica da Equação do Calor, recorrendo à técnica das Séries de Fourier que são ferramentas importantíssimas, para uma possível solução escrita da equação.

MATERIAL E MÉTODOS

O método predominantemente utilizado na busca de soluções para os problemas (I) e (II) apresentados no presente trabalho fora o Método de Fourier para solução de uma equação diferencial, o qual consiste em considerar a função *u(x,t)* como sendo o resultado do produto de duas funções *F* e *G* onde *F* é uma função real definida no intervalo [0,L] na variável *x* enquanto *G* é também uma função real definida na variável *t*, para todo $t \geq 0$.

Desta forma, o objetivo deste trabalho é apresentar soluções para os problemas (I) e (II) utilizando para isso o Método de Fourier juntamente com os principais resultados obtidos através do estudo das Séries de Fourier.

RESULTADO

Consideremos uma barra de comprimento L, cuja secção transversal tem área A, feita de um material condutor uniforme de calor, fixada na origem dos eixos, no quadrante de cordenadas positivas do espaço $\mathbb{R}^3$.

O presente trabalho consiste inicialmente, no estudo do problema da condução do calor em tal barra, com suas extremidades mantidas à temperatura zero e cuja condição inicial é dada pela equação , onde *f* é uma função real definida $u(x,o) = f(x)$ no intervalo [0,L]. Ou seja, iremos determinar uma função *u* que satisfaça o seguinte problema misto:

$$\begin{aligned} &u_t = Ku_{xx}; t > 0, \quad 0 < x < L \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0; \quad t > 0 \qquad\qquad (I) \\ &u(x,0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

onde a constante *K* e a função *f* são dadas.

Consideramos a seguir o problema da condução do calor numa barra submetida a temperaturas não-nulas nas extremidades. O problema matemático seria determinar *u(x,t)* tal que:

$$\begin{aligned} &u_t = Ku_{xx}; t > 0, \quad 0 < x < L \\ &u(0,t) = h_0(t), u(L,t) = h_1(t); \quad t > 0 \qquad \text{(II)} \\ &u(x,0) = f(x); \quad 0 \le x \le L, \end{aligned}$$

onde f, h_0 e h_1 são funções dadas.

Por fim, apresentamos a solução do problema proposto em (II) para dois casos diferentes. O primeiro para quando $h_0(t) = \alpha_1$ e $h_1(t) = \beta_1$, e o segundo para quando $h_0(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t$ e $h_1(t) = \beta_1 + \beta_2 t$, onde α_1, α_2, β_1 e β_2 são constantes.

O TEOREMA DE FOURIER: Seja f uma função real definida nos reais, seccionalmente diferenciável e de período 2L. Então a série de Fourier da função f, converge, em cada ponto x para $[f(x + 0) + f(x - 0)]/2$, isto é,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\tfrac{n\pi x}{L} + b_n sen\tfrac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] \qquad (*)$$

onde o primeiro membro da igualdade (*) é a série de Fourier da função f e a_n e b_n são os coeficientes de Fourier referentes a f e definidos respectivamente por:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{L}dx, n \ge 0; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\tfrac{n\pi x}{L}dx, n \ge 1$$

DISCUSSÃO

Trabalhemos Inicialmente com o problema (I).

Pelo método de separação de variáveis chegamos a uma expressão que nos parece ser um razoável candidato à solução do PVIF (I) (Problema de Valor Inicial e de Fronteira, também chamado de Problema Misto). A expressão foi a seguinte:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} sen\tfrac{n\pi x}{L}, \qquad (2)$$

onde os coeficientes c_n devem ser escolhidos de modo que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\tfrac{n\pi x}{L}. \qquad (3)$$

Portanto, não há escolha, os c_n devem ser os coeficientes de Fourier da função f, definida em [0,L], e estendida para o resto de $\mathbb{R}$ de modo a ser ímpar e periódica de período $2L$. Assim

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\tfrac{n\pi x}{L}dx. \qquad (4)$$

É importante mencionar que a igualdade (3) não se verifica para uma função *f*, arbitrária. Portanto a distribuição inicial de temperatura deve satisfazer a certas condições especiais. Pelo Teorema de Fourier vê-se que (3) se verificará, para todo x em [0,L] caso f seja contínua, $f(x)=f(0)=0$ e f' seja seccionalmente contínua.

A ideia da resolução para o problema (II) é procurar reduzi-lo a um outro com condições de fronteira homogênea, através de uma mudança de variável dependente u. Assim suponha que seja possível achar uma função $v(x,t)$ de classe C² em$\Omega = \{(x,t) \text{ em } \mathbb{R}^2;\ 0 < x < L\ ;\ t > 0\}$ tal que $v(0,t)=h_0(t)$, $v(L,t)=h_1(t)$. Então, designando por u a solução do PVIF (II), segue-se que a função $w=u-v$ satisfaz ao seguinte problema:

$$\begin{aligned} &w_t = Kw_{xx} + g(x,t); \quad em\,\Omega \\ &w(0,t) = w(L,t) = 0; \quad t > 0 \\ &w(x,0) = f(x) - v(x,0); \quad 0 \le x \le L \end{aligned} \qquad (5)$$

onde $g(x,t) = kv_{xx} - v_t$. Agora é só determinar v de modo que seja solução da equação do calor em Ω, então g ≡ 0, e w será simplesmente a solução do problema.

Fica claro desta forma que quando $h_0(t) = \alpha_1$ e $h_1(t) = \beta_1$ onde α_1 e β_1 são constantes, basta tomar $v(x,t) = \alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1)x/L$. Logo, a solução para o PVIF (II) neste caso será dada por:

$$u(x,t) = \alpha_1 + \frac{\beta_1 - \alpha_1}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} sen\,\tfrac{n\pi x}{L} \qquad (6)$$

Por fim, considerando $h_0(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t$ e $h_1(t) = \beta_1 + \beta_2 t$, onde α_1, α_2, β_1 e β_2 são constantes. Deve-se determinar uma função $y(x)$ tal que:

$$Ky_{xx} = \alpha_2 + (\beta_2 - \alpha_2)x / L, \qquad (7)$$

com $y(0) = y(L) = 0$. Tal função obtém-se a partir de duas integrações em (7) o que resultará em:

$$y(x) = \frac{\alpha_2}{2K}x(x-L) + \frac{\beta_2 - \alpha_2}{6LK}x(x^2 - L^2).$$

Assim, toma-se:

$$v(x,t) = h_0(t) + \frac{x}{L}(h_1(t) - h_0(t)) + y(x \qquad (8)$$

e verifica-se facilmente que $w = u - v$ é solução para (5) o que garante ser $u = w + v$, solução para o PVIF (II) neste caso.

CONCLUSÃO

A teoria do calor de Fourier é um dos primeiros exemplos da análise aplicada à Física. A partir de premissas simples que nada mais são do que fatores experimentais generalizados, Fourier deduziu uma série de consequências, que juntas, constituem uma teoria completa e coerente. Os resultados obtidos por Fourier são certamente interessantes por si só, no entanto, o que é ainda mais interessante como conseguimos notar, é o método que este desenvolveu e que serve de modelo para todos aqueles que possuem o desejo de desenvolver qualquer ramo da Física Matemática. Atrevemo-nos ainda dizer que tal teoria é de forma clara, mais importante para a análise pura do que para análise aplicada, uma vez que a busca de soluções para equações diferenciais parciais não é, de forma alguma, uma tarefa fácil ou trivial.

REFERÊNCIAS

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4 ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007, p. 1-126.

FIGUEIREDO, D. G., **Análise Real 1.** 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 1996, p. 197-235.

IÓRIO, V. M.N, **EDP Um Curso de Graduação**. 2 ed. Rio 4 ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007, p. 1-55, 93-135, 159-174.