DINÂMICA POPULACIONAL APLICADA À POPULAÇÃO DE ADAMANTINA

POPULATION DYNAMICS APPLIED TO POPULATION ADAMANTINA

Naiara Chierici da Rocha
Vanessa Botta
Departamento de Matemática, Estatística e Computação, FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP
naiara.chierici27@hotmail.com, botta@fct.unesp.br

RESUMO

O uso da modelagem matemática vem crescendo muito nos últimos anos, pois os modelos matemáticos são utilizados na compreensão de problemas do nosso cotidiano. Como exemplo, temos os modelos de dinâmica populacional, que representam o comportamento de uma determinada população através de equações diferenciais ordinárias. Neste trabalho, estudaremos a dinâmica populacional do município de Adamantina (SP) através dos modelos matemáticos propostos por Malthus e Verhulst, com o objetivo de comparar os dados obtidos através da modelagem matemática com os dados oficiais do SEADE (Sistema Estadual de Análise de Dados) e também fazer uma previsão do número de habitantes de Adamantina nos próximos anos através dos modelos estudados.

Palavras-chave: dinâmica populacional, modelos matemáticos, equações diferenciais ordinárias autônomas.

ABSTRACT

The use of mathematical modeling has been increasing in recent years, because mathematical models are used in understanding the problems of everyday life. As an example, the population dynamics models, which represent the behavior of a given population through ordinary differential equations. In this paper, we study the dynamics of Adamantina county population (SP) through mathematical models proposed by Maltus and Verhulst, in order to compare the data obtained by mathematical modeling with the official data from SEADE (State System for Data Analysis and also to predict the number of inhabitants of Adamantina in the coming years through the models studied.

Key-words: population dynamics, mathematical models, autonomous ordinary differential equations

INTRODUÇÃO

O modelo de Malthus foi criado em 1978 e gerou uma acirrada controvérsia no começo do século XIX, pois Malthus afirmava que a população mundial crescia apenas em proporção geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresciam apenas em proporção aritmética. Portanto, a população seria controlada por fome, miséria e muitas outras coisas da natureza.

Já o modelo de Verhulst ou modelo logístico foi apresentado em 1837 e propõe que o crescimento da população é limitado por um fator logístico, que é a capacidade de sustentação do meio ambiente. Este modelo supõe que uma população, vivendo num determinado meio, crescerá até um limite sustentável, ou seja, ela tenderá a uma estabilidade. A equação incorpora a queda do crescimento da população que está sujeita a um fator inibidor.

A partir destes dois modelos matemáticos, será feita uma comparação com os dados do número de habitantes de Adamantina obtidos pelo SEADE nos anos de 1970, 1980 1991, 1996, 2000 e 2007 com os dados dos dois modelos, e também será feita uma previsão do número de habitantes para os anos de 2010, 2015 e 2020.

BREVE HISTÓRICO

Aparentemente, o economista britânico Thomas Malthus (1766-1834) foi o primeiro a observar que muitas populações biológicas crescem a uma taxa proporcional à população. Seu primeiro artigo sobre populações apareceu em 1798.

Verhulst (1804-1849) foi um matemático belga que introduziu um modelo matemático para o crescimento populacional humano em 1837. Ele se refere a esse crescimento como crescimento logístico; por isso, o modelo de Verhulst é chamado, muitas vezes, de modelo logístico. Ele não foi capaz de testar a precisão do seu modelo devido a dados inadequados do censo e não recebeu muita atenção até muitos anos depois. A concordância razoável do modelo com dados experimentais foi demonstrada por R. Pearl (1930) para populações de Drosophila melanogaster (mosca das frutas) e por G. F. Gause (1935) para populações de Paramecium e Tribolium (besouro da farinha).

MODELO MALTHUSIANO

Dada uma população n, animal ou vegetal, pode-se calcular sua variação em função do tempo da seguinte forma:

$$\frac{dn}{dt} = n(t) \ , \tag{1}$$

onde $n(t)$ assume somente valores inteiros. Assim, $n(t)$ é classificado como sendo uma função discreta de t, mas, quando o número de indivíduos é suficientemente grande, $n(t)$ é aproximado por uma função contínua.

Este modelo é baseado numa população em condições perfeitas para o seu desenvolvimento, ou seja, sem guerras, epidemias, e muitos outros desastres naturais.

Os modelos discreto e contínuo de Malthus são apresentados a seguir.

Modelo discreto de Malthus

Seja $k = c - m$, onde c é o coeficiente de natalidade e m o coeficiente de mortalidade. Assim, k será a taxa de crescimento específico da população $n(t)$. Esta taxa que será considerada constante, isto é,

$$\frac{n(t+1) - n(t)}{n(t)} = c - m = k \ . \tag{2}$$

Observando a equação (2), conclui-se que a taxa de crescimento da população é proporcional à própria população em cada período de tempo.

O modelo discreto de Malthus é dado por

$$n(t+1) - n(t) = kn(t) \, . \tag{3}$$

Considerando que a população inicial seja $n(0) = n_0$, então a solução do modelo discreto de Malthus será dada na forma

$$\begin{cases} n_{t+1} = (1+k)n_t \\ n(0) = n_0 \end{cases}.$$

Ou seja,

$$n_t = (1+k)^t\, n_0\,. \tag{4}$$

Assim, dada à população inicial, é possível fazer estimativas dessa população em qualquer tempo.

A equação (4) pode ser reescrita na forma exponencial, isto é,

$$n(t) = n_0 e^{\ln(1+k)^t}\,. \tag{5}$$

Modelo Contínuo de Malthus

A solução da equação (1) é $\dfrac{dn}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t}$, onde $n(t+\Delta t) - n(t) = \beta n(t)\Delta t$ será o modelo contínuo.

Sendo dada a população inicial, a solução do modelo contínuo será:

$$n(t) = n_0 e^{\beta t}\,. \tag{6}$$

Analisando as duas soluções, podemos concluir que os modelos com a mesma população inicial fornecem o mesmo resultado, ou seja, as soluções são a mesma, considerando $\beta = \ln(1+k)$. Assim, dados os dois modelos, as soluções para o cálculo de certa população de indivíduos da mesma espécie são idênticas.

Mas os modelos de Malthus são inúteis para calcular populações em espaços de tempo muito longos, pois estes modelos não levam em conta os problemas que podem ocorrer nestes períodos. Assim, o valor estimado sempre será muito acima da população real. Outro problema dos dois modelos de Malthus é considerar que as taxas de natalidade e mortalidade serão sempre constantes. Mas quando se trata de população devem-se levar em conta os indivíduos que não podem se reproduzir; assim, os modelos falham mais uma vez. Os pontos positivos desses modelos são que a partir deles é que começaram a surgir novos modelos para o cálculo de populações. Um exemplo é o modelo de Verhulst.

Os modelos populacionais são muito usados para o cálculo (estimativa) de população em curto espaço de tempo, por exemplo, o crescimento de bactérias, para que se possam fazer projeções e tomar decisões a respeito da mesma (BASSANEZI, 2002).

MODELO DE VERHULST

A equação diferencial ordinária apresentada abaixo representa a variação da população, em relação ao tempo:

$$\frac{dN}{dt} = f(N)\,.$$

Temos que a taxa de variação é uma função do número N de indivíduos no instante t, mas $f(N)$ deve ter um formato parabólico, ou seja, a taxa é positiva inicialmente e depois se torna negativa. Chegamos então ao seguinte modelo:

$$\frac{dN}{dt} = KN(1-N).$$

Resolvendo esta equação diferencial ordinária separável, obtemos:

$$dN = KN(1-N)dt$$
$$\frac{dN}{N(1-N)} = Kdt$$
$$\frac{1}{N(1-N)}dN = Kdt$$
$$\int \frac{1}{N(1-N)}dN = K\int dt$$

Resolvendo a integral parcial e usando a propriedade de logaritmo natural, temos

$$N(t) = \frac{c_1 e^{kt}}{1 + c_1 e^{kt}}.$$

Supondo $N(0) = N_0$ (população inicial), obtemos

$$c_1 = \frac{N_0}{1 - N_0}.$$

Portanto,

$$N(t) = \frac{N_0 e^{kt}}{(1-N_0) + N_0 e^{kt}}. \quad (7)$$

Neste modelo de Verhulst, diferentemente do modelo de Malthus, existe um "limiar" ou um limite para o qual a população tende quando o tempo cresce. Podemos pensar que esse limiar é um número L de indivíduos, ou seja, se a população inicial é menor que L indivíduos, ela tende crescer até o limite. Por outro lado, se a população inicial é maior que L, ela tende a decrescer até L. Este limiar L é chamado de "capacidade total do meio", ou seja, o meio suporta esta quantidade de indivíduos.

APLICAÇÃO DOS MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL NA POPULAÇÃO DE ADAMANTINA

Utilizaremos os modelos de Malthus e Verhust para calcular o número de habitantes da população de Adamantina. Os dados usados para esta comparação foram adquiridos pelo SEADE (Sistema Estadual de Análise de Dados) no site www.seade.gov.br.

Os cálculos serão feitos até o ano de 2020, com o objetivo de fazer uma previsão do número de habitantes do município. Na Tabela 1.1 são apresentados os valores da população de Adamantina segundo os dados oficiais do SEADE.

Tabela 1-População de Adamantina fornecida pelo SEADE

Ano	Adamantina
1970	31776
1980	32036
1991	32088
1996	33000
2000	33457
2007	33289

Modelos de Malthus

Modelo Discreto

O primeiro passo é adquirir o fator de crescimento da população, tomando dois valores distintos de *t*. Considerando a equação (4), do modelo discreto de Malthus, e fazendo n_t igual à população do ano de 1980 e n_0 a população de 1970, podemos calcular o valor da taxa de crescimento *k* da população:

$$32036 = (1+k)^{10} 31776 \Leftrightarrow (1+k)^{10} = \frac{32036}{31776} \Leftrightarrow 1+k = \sqrt[10]{\frac{32036}{31776}} \Leftrightarrow k = 1{,}00818 - 1 \Leftrightarrow k = 0{,}00081 .$$

Portanto, a taxa de crescimento da população de Adamantina foi de aproximadamente 0,8% ao ano entre os anos de 1970 e 1980. Com esta taxa é possível estimar o crescimento da população adamantinense de 1970 até 2020, usando o modelo discreto de Malthus. A população de 1970 é considerada como população inicial ($n_{1970} = 31776$).

Logo,

$$n_{1980} = 31776 e^{\ln(1+0{,}00081)^{10}} \Rightarrow n_{1980} = 31776.1{,}0081 \Rightarrow n_{1980} = 32036$$
$$n_{1991} = 32321$$
$$n_{1996} = 32452$$
$$n_{2000} = 32557$$
$$n_{2007} = 32742$$
$$n_{2010} = 32821$$
$$n_{2015} = 32955$$
$$n_{2020} = 33098$$

Modelo Contínuo

Os mesmos dados usados na seção anterior serão usados agora para o modelo contínuo, dado pela equação (6). Considerando também as populações de 1970 e 1980 para o cálculo da taxa de crescimento para o modelo contínuo de Malthus, obtemos o valor de β:

$$32036 = 31776e^{10\beta} \Leftrightarrow e^{10\beta} = \frac{32036}{31776} \Leftrightarrow e^{10\beta} = 1{,}0082 \Leftrightarrow 10\beta = \ln 1{,}0082 \Leftrightarrow 10\beta = 0{,}0081 \Leftrightarrow$$
$$\beta = 0{,}00081.$$

Com este valor vamos estimar a população adamantinense para 1980, 1991, 1996, 2000, 2007, 2010,2015 e 2020, sendo que a população inicial será a população da década de 70.

Assim,

$n(1970) = 31776$
$n(1980) = 31776.e^{10.0,00081} \Rightarrow n(1980) = 31776.e^{0,0081} \Rightarrow n(1980) = 31776.1{,}0082 \Rightarrow n(1980) = 32036$
$n(1991) = 32321$
$n(1996) = 32452$
$n(2000) = 32558$
$n(2007) = 32743$
$n(2010) = 32822$
$n(2015) = 32956$
$n(2020) = 33090$

Os valores obtidos pelos dois métodos de Malthus são sintetizados na Tabela 2 Para facilitar a comparação, na primeira coluna estão os dados oficiais do SEADE.

Tabela 2-População de Adamantina segundo Malthus, entre 1970 e 1980

Ano	Dados do SEADE	Malthus Contínuo	Malthus Discreto
1970	31776	31776	31776
1980	32036	32036	32036
1991	32088	32321	32321
1996	33000	32452	32452
2000	33457	32558	32557
2007	33289	32743	32742
2010		32822	32821
2015		32956	32955
2020		33099	33098

Observando a Tabela 2 verificamos que os valores obtidos pelos dois métodos de Malthus são praticamente idênticos. Porém, alguns valores são superiores aos dados oficiais do SEADE. Isto se deve ao fato de se tratar de modelos exponenciais, sendo que a tendência da população de Adamantina com estes modelos é crescer sem parar. Além disso, o intervalo entre uma observação e outra da população, 10 anos, é relativamente grande. Além disso, como a taxa de crescimento da população de Adamantina é muito pequena, a população vai crescendo devagar.

Modelo de Verhulst

Da mesma forma que foi feito para o modelo de Malthus, primeiro é necessário calcular a taxa de crescimento da população para que possa ser feita à estimativa da população desejada.

Isolando e^{kt} na equação (7) obtemos o valor da taxa de crescimento, que é $k=-2,5\times10^{-8}$. Dessa forma, podemos estimar o valor da população de Adamantina para os anos em questão.

$$N(10)=\frac{31776e^{10\cdot(-2,5\times10^{-8})}}{-31775+31776e^{10\cdot(-2,5\times10^{-8})}}\Rightarrow N(10)=32096$$
$$N(21)=32326$$
$$N(26)=32424$$
$$N(30)=32425$$
$$N(37)=32758$$
$$N(40)=32759$$
$$N(45)=32900$$
$$N(50)=33000$$

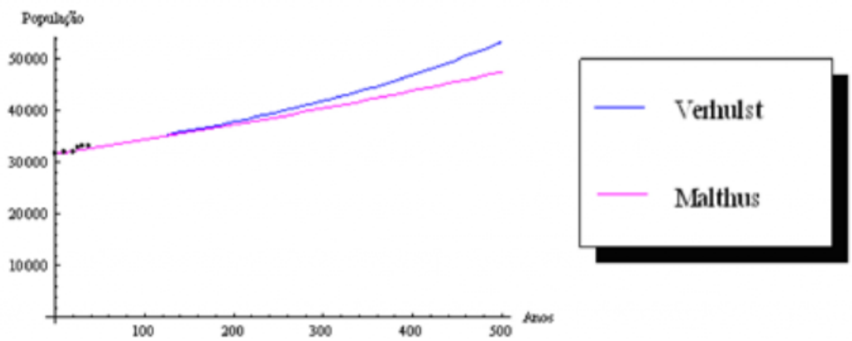
Uma comparação entre os valores oficiais do SEADE e os valores obtidos nos modelos contínuos de Malthus e Verhulst pode ser feita através da Tabela 3.

Tabela 3 – População de Adamantina, segundo Verhulst, entre 1970 e 1980

Ano	Dados do SEADE	Malthus Contínuo	Verhulst
1970	31776	31776	31776
1980	32036	32036	32096
1991	32088	32321	32326
1996	33000	32452	32424
2000	33457	32558	32425
2007	33289	32743	32758
2010		32822	32759
2015		32956	32900
2020		33099	33000

Na Tabela 3 verificamos que os valores obtidos pelo modelo de Verhulst são próximos aos valores obtidos pelo modelo de Malthus.

As curvas de crescimento da população de Adamantina segundo os dados oficiais do SEADE e os dois modelos são apresentadas na Figura 1.



CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma comparação entre modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst. Podemos observar que os dois modelos são parecidos em suas formulações matemáticas, porém eles se diferenciam nos valores dos cálculos obtidos. Este fato é devido às considerações que foram feitas na elaboração de cada modelo e, além disso, o modelo de Verhulst é basicamente o de Malthus com um limite para a população do ambiente determinado. O modelo de Malthus considera o crescimento populacional constante e este crescimento é ilimitado. Neste caso, o modelo de Malthus cresce bem devagar pelo fato da população de Adamantina ter uma taxa de crescimento muito pequena. No modelo de Malthus o crescimento populacional é uma razão geométrica, mas não leva em consideração o fato de que a taxa de natalidade não cresce na mesma razão da população do ambiente, enquanto que no modelo de Verhulst a taxa de crescimento é proporcional ao tamanho da população, além do fato de que a população é limitada ao ambiente em que está inserida.

Assim, com estes dados e comparações, podemos concluir que o modelo de Malthus é mais eficiente quando o intervalo de tempo é curto e com o modelo de Verhulst já ocorre o contrário, ou seja, obtemos melhores aproximações quando o intervalo de tempo é longo.

Portanto, o modelo de Malthus é eficiente para o cálculo de população que tenha um período reprodutivo curto, como as bactérias, entre outros. Já o modelo de Verhulst pode ser usado para o cálculo de população com período de reprodução longa, mas, devido a sua simplicidade, este modelo é contestado.

Os modelos de Malthus e Verhulst foram essenciais na elaboração de modelos eficientes para determinar a população de um determinado ambiente.

Estes ou outros modelos serão sempre úteis para se estimar populações, de forma que o ambiente possa ser preparado para o crescimento ou decrescimento dessas populações.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSANEZI, R. C. FERREIRA JR. W. C. **Equações diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1988.

BRONSON, R. **Moderna Introdução às Equações Diferenciais**. São Paulo: Editora McGrew-Hill do Brasil, 1976.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, uma nova estratégia**. São Paulo Contexto, 2002

DADOS POPULACIONAIS DE ADAMANTINA. Disponível em: http://www.seade.gov.br, acessado em: 15 set 2009.

FIGUEIREDO, D. G., NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: Editora Impa, 2002