Faculdades Adamantinenses Integradas (FAI)

www.fai.com.br

BAZÃO, Vanderléa Rodrigues; MEIRA, Suetônio de Almeida; NOGUEIRA, José Roberto. Análise de Fourier para o estudo analítico da equação da onda. Omnia Exatas, v.3, n.2, p.13-18, 2010.

ANÁLISE DE FOURIER PARA O ESTUDO ANALÍTICO DA EQUAÇÃO DA ONDA

FOURIER ANALYSIS FOR THE ANALYTIC STUDY OF THE WAVE EQUATION

Vanderléa Rodrigues Bazão
Mestranda em Matemática Aplicada e Computacional - PosMAC - FCT – UNESP - Presidente Prudente.

Suetônio de Almeida Meira
José Roberto Nogueira
Professores Doutor do Departamento de Matemática, Estatística e Computação – FCT - UNESP - Presidente Prudente.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar uma possível solução analítica para a Equação da Onda, onde abordamos o problema da corda vibrante, esta equação é escrita como uma Equação Diferencial Parcial (EDP) de segunda ordem: $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. A partir das hipóteses feitas sobre as condições iniciais e de fronteira do problema, podemos aplicar o Método de Fourier para obter uma Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem, e assim chegar a uma série de senos e cossenos, que é considerada uma possível solução para o problema. Além, de analisarmos que hipóteses são necessárias para que esse resultado seja matematicamente válido.

Palavras Chaves: Equações Diferenciais; Equação da Onda; Séries de Fourier.

ABSTRACT

The present work intends to study an analytical solution possible for the wave equation, where we approach the problem of vibrating string, this equation is written as a partial differential equation of second order: $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Based on the hypotheses made about the initial conditions and boundary of the problem, we can apply the Fourier method to obtain an ordinary differential equation of second order, and thus arrive at a series of sines and cosines, which is considered a possible solution to the problem. In addition, we review the hypotheses that are needed for this result is mathematically valid.

Key-words: Differential Equations, Wave Equation, Fourier Series.

INTRODUÇÃO

Uma onda surge quando um sistema é deslocado de sua posição de equilíbrio e a perturbação pode se deslocar ou se propagar de uma região para outra do sistema. As ondas são relevantes em todos os ramos da ciência físicas e biológicas; temos como exemplos de fenômenos ondulatórios: a oscilação de cordas, o som, a luz, as ondas do mar, a transmissão de rádio e de televisão e os terremotos.

As Ondas Mecânicas são as mais familiares, elas são encontradas praticamente o tempo todo, como nas ondas na água, as ondas sonoras e as ondas sísmicas; todas possuem certas características centrais, pois são governadas pelas leis de Newton e podem existir apenas dentro de um meio material, como na água, no ar e nas rochas.
A maioria dos problemas físicos é modelado matematicamente por equações, ou sistemas de equações, que envolvam derivadas parciais da função incógnita. Isto ocorre por entidades físicas, que na maioria das vezes

são funções de mais de uma variável, como o caso da propagação de uma onda que pode variar ponto a ponto, no meio e depender do tempo. As taxas de variação destas entidades são representadas por suas derivadas parciais. Faz-se necessário, portanto, a apresentação de soluções para estas equações. Em alguns casos é possível resolvê-las obtendo as chamadas soluções analíticas e o Método de Fourier é uma poderosa ferramenta para se determinar essa solução.

MATERIAL E MÉTODOS

A série de Fourier foi desenvolvida em 1822 por Jean Baptiste Joseph Fourier, que acreditava ser possível através da soma de funções seno e cosseno, representar os mais diferentes tipos de funções. Apesar de ter sido elaborada como subsídio matemático para o estudo do problema sobre a condução do calor, a aplicação desta série de senos e cossenos, estendeu-se a todos os ramos da Física, Engenharia e Matemática, sendo comum encontrarmos o uso desta série nos mais diversos artigos, não só na área de exatas, mas também nas de humanas e biológicas. Mostrando ser uma rica ferramenta para o desenvolvimento científico da sociedade, frisando que o trabalho desenvolvido por esse talentoso cientista francês, realizado há mais de dois séculos é extremamente útil e importante até os dias atuais, sendo incalculável o impacto que a obra de Fourier casou na sociedade científica.

Para a realização desse trabalho consideramos como conhecimentos prévios os conceitos sobre a convergência de séries de funções e em especial a respeito da Série de Fourier, presentes em Figueiredo (1977) e Figueiredo (1996). Deixamos como observação, que todo esse estudo já foi realizado em um projeto de iniciação cientifica, financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a formulação matemática do problema da Equação da Onda, consideramos o caso das ondas mecânicas, em particular a oscilação de cordas. Seja uma corda de comprimento *L* situada sobre o eixo dos *x*, com a origem no ponto de abscissa *0* e extremidade *L*. Procuramos encontrar a elongação $u(x,t)$ ao oscilar a corda, supondo-se os extremos fixos, conhecendo-se a posição inicial *f*(*x*) da corda e a velocidade *g(x)* no instante $t=0$. Assim o problema consiste em encontrar uma função real $u(x,t)$ definida para $0<x<L$ e $t>0$ tal que: $c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, onde *c* é a velocidade de propagação dessa oscilação; e que satisfaça as condições iniciais $u(x,0)=f(x)$ e $\dfrac{\partial x}{\partial t}(x,0)=g(x)$, sendo *f* e *g* funções conhecidas; e que também satisfaça as condições de fronteira $u(0,t)=u(L,t)=0$; assim temos definido um problema de valores inicial e de fronteira (PVIF).

Uma solução para este PVIF, pode ser determinada pelo Método de Fourier, que consiste em, primeiramente usar separação de variáveis e procurar soluções $u(x,t)$ do problema na forma: $u(x,t)=X(x)T(t)$, sendo X uma função só de *x* e *T* uma função só de *t*. Substituindo na equação da onda temos: $XT''-c^2X''T=0$.

Agora, nos pontos onde *T* e *X* não se anulam, obtemos do lado esquerdo uma função apenas de *t*, enquanto o lado direito é uma função de *x*. Logo tanto o lado direito quanto o lado esquerdo, que são iguais e devem independer de *x* e *t*. Isso quer dizer: $\dfrac{T''(t)}{c^2T(t)}=-\lambda=\dfrac{X''(x)}{X(x)}$; onde *λ* é um parâmetro independente de *x* e *t*.

Das condições de fronteira (extremos da corda), resulta: $u(0,t)=X(0)T(t)=0$ e $u(L,t)=X(L)T(t)=0$. Concluímos, então que $X(0)=X(L)=0$, logo podemos formular os seguintes problemas, para encontrar as funções *X* e *T:*

Primeira EDO: $X''(x)+\lambda X(x)=0$; para $X(0)=X(L)=0$.

Segunda EDO: $T''(t)+\lambda c^2 T(t)=0$

Assim temos duas EDOs de segunda ordem, as quais podemos determinar as soluções, e consequentemente resolver nosso PVIF. Mas para isso, devemos considerar quais são as situações em que as soluções dessas equações diferenciais ordinárias são válidas, notando que as hipóteses sobre as condições iniciais e de fronteira do nosso PVIF são essências para se determinar uma solução para o problema.

Para resolver a primeira EDO, impomos condições sobre λ, pois se $\lambda \leq 0$ temos que $X \equiv 0$ o que não interessa, pois nesse caso teríamos que $u \equiv 0$. Agora se $\lambda > 0$ a equação tem a forma: $X''+\lambda X=0$; cujas raízes do polinômio característico $X^2+\lambda=0$, são $\pm i\sqrt{\lambda}$, e a solução geral tem a forma: $X(x)=c_1 sen\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x$.

Das condições de contorno segue que: $X(0)=c_2=0$ e $X(L)=c_1 sen\sqrt{\lambda}L$, como queremos $c_1 \neq 0$, devemos ter $sen\sqrt{\lambda}L=0$, isto é, $\sqrt{\lambda}L=k\pi$, sendo *k* um número inteiro.

Logo, o problema possui solução não nula para apenas uma coleção enumerável de valores de *λ*, a cada λ_k corresponde uma solução $X_k(x)$, definida por: $X_k(x)=sen\dfrac{k\pi x}{L}$; e estas são chamadas funções próprias ou auto-funções.

Agora resolvemos o problema: $T''(t)+\lambda_k c^2 T(t)=0$, conforme vimos na primeira EDO, λ_k é sempre positivo. Temos o polinômio característico $T^2+\lambda_k c^2=0$, cujas raízes são $\pm ic\sqrt{\lambda_k}$. Logo a solução tem a forma: $T_k(t)=a_k\cos c\sqrt{\lambda_k}t+b_k senc\sqrt{\lambda_k}t$, sendo a_k e b_k constantes.

Portanto as funções $u_k(x,t)=\left(a_k\cos\dfrac{k\pi c}{L}t+b_k sen\dfrac{k\pi c}{L}t\right)sen\dfrac{k\pi}{L}x$; para *k=1, 2,...*; devem satisfazer nossa equação com as condições iniciais e as condições de contorno.

Dado o caráter linear da equação diferencial e das condições iniciais e de contorno. Temos que toda soma da forma: $S_n(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\dfrac{k\pi c}{L}t+b_k sen\dfrac{k\pi c}{L}t\right)sen\dfrac{k\pi}{L}x$, também é solução.

A questão principal é se mediante certas restrições sobre os dados iniciais *f* e *g* a sucessão $S_n(x,t)$ converge uniformemente para uma função $u(x,t)$, em $0\leq x\leq L,\ t\geq 0$ que é solução do nosso problema. Seja $u(x,t)=\lim_{n\to\infty}S_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi c}{L}t+b_n sen\dfrac{n\pi c}{L}t\right)sen\dfrac{n\pi}{L}x$. E suponha, que além de existir este limite $u(x,t)$ ele realmente seja solução do problema, para ser solução de nossa equação é suficiente que a série que define $u(x,t)$ seja duas vezes derivável. Assim deve satisfazer as condições iniciais:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n sen\frac{n\pi}{L}x \quad \text{e} \quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{n\pi c}{L}sen\frac{n\pi}{L}x \qquad (1.1)$$

Logo um candidato para a solução do problema seria:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+b_n sen\frac{n\pi c}{L}t\right)sen\frac{n\pi}{L}x \qquad (1.2)$$

Sendo a_n e b_n coeficientes das séries para as funções *f* e *g*, esses são denominados coeficientes de Fourier, que devido às hipóteses sobre as condições iniciais:

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)sen\frac{n\pi}{L}xdx \quad \text{e} \quad b_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (1.3)$$

Logo a solução formal do PVIF, é dada pela expressão (1.2) e os coeficientes de Fourier por (1.3).

Devemos observar que o método utilizado acima apresentou um resultado favorável, entretanto apenas mencionamos que eram necessárias determinas hipóteses sobre as funções *f* e *g*, e sobre a convergência uniforme da série, não nos preocupamos com o rigor da matemática na validação desse resultado.

Para a verificação de que a expressão (1.3) seja realmente uma solução do PVIF, precisamos de alguns resultados sobre a *Convergência de Séries de Funções* e de um estudo mais detalhado da *Série de Fourier,* o que permite a aplicação do seguinte teorema: *Suponha que f e g sejam funções dadas em [0, L] tais que f, f',f'',g, g' sejam contínuas e f''' e g'' são seccionalmente contínuas. Além disso, suponha que f(0)=f(L)=f''(0)=f''(L)=g(0)=g(L)=0. Então: (i)* a_n *e* b_n *estão bem definidos por (1.3); (ii) ocorrem as igualdades em (1.1); (iii) A expressão (1.2) define uma função contínua no conjunto dos pontos aderentes a* $\mathcal{R}$*, de classe C² em* $\mathcal{R}$*, que satisfaz à equação das ondas em* $\mathcal{R}$*, sendo* $\mathcal{R}$ *a semi-faixa* $\{(x,t)\in IR^2 : 0<x<L, t>0\}$. (Vide Figueiredo (1977)). Ou seja, se o PVIF satisfizer as hipóteses desse teorema a expressão (1.3) é uma solução para o problema.

CONCLUSÃO

A aplicação do Método de Fourier possibilitou obter uma solução "formal" para o PVIF, logo se esse problema possuir solução poderá ser dada pela expressão (1.3), sendo necessário impor as condições iniciais que satisfaçam o teorema acima, onde consideramos a situação da corda vibrante com as extremidades fixas.

Podemos ver a demonstração desse teorema em Figueiredo (1977), sendo que esta foi a bibliografia básica para todo o desenvolvimento desse trabalho. Também foi possível perceber a aplicação da Matemática em fenômenos físicos, mostrando a utilidade de certas teorias matemáticas e um dos motivos delas terem sido desenvolvidas.

Por fim, é interessante observarmos que para obter uma solução escrita para essa equação diferencial é essencial que as hipóteses sobre as condições iniciais e de contorno satisfaçam a do teorema acima. Pois, o Método de Fourier permite escrever essa solução como uma série de senos e cossenos, entretanto quando as hipóteses desse teorema não forem satisfeitas e também não for possível escrever a solução analítica para o problema, ainda existem os métodos numéricos que podem fornece aproximações para a solução.

REFERÊNCIAS

FIGUEIREDO, D. G. **Analise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1977.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise Real 1**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1996.

HALLIDAY, D. RESNIK, R. WALKER. **Fundamentos de Física 2**. Rio de Janeiro: LTC, 1996

MEDEIROS, L. A. & ANDRADE, N. G. **Iniciação às equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1978.

YOUNG, H. D.& FREEDMAN, R. A. **Física II: Termodinâmica e Ondas**. 10ª ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.