



Faculdades Adamantinenses Integradas (FAI)

[www.fai.com.br](http://www.fai.com.br)

SOUZA, Simone Silva Frutuoso; LIMA, Fernando Parra Anjos; ROMERO, Rubén; MINUSSI, Carlos Roberto. Resolução de problemas de programação não linear com métodos unidimensionais irrestritos. Omnia Exatas, v.4, n.1, p.57-71, 2011.

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR COM MÉTODOS UNIDIMENSIONAIS IRRESTRITOS

## RESOLUTION OF PROBLEMS OF NON-LINEAR PROGRAMMING WITH ONE-DIMENSIONAL METHODS

**Simone Silva Frutuoso de Souza**

Mestrando em Engenharia Elétrica – FEIS – UNESP – Ilha Solteira.

**Fernando Parra dos Anjos Lima**

Mestrando em Engenharia Elétrica – FEIS – UNESP – Ilha Solteira.

**Rubén Romero**

Professor Titular – DEE – FEIS – UNESP – Ilha Solteira.

**Carlos Roberto Minussi**

Professor Titular – DEE – FEIS – UNESP – Ilha Solteira.

### RESUMO

Este trabalho de pesquisa tem como objetivo analisar os métodos unidimensionais irrestritos aplicados à resolução de problemas de programação não linear (PNL). Os métodos abordados serão os seguintes: o método da seção Áurea, o método da Bisseção e método de Newton. (BAZARAA, 1993). Utilizam-se os métodos para resolver um problema de programação não linear e analisar de forma avaliativa e comparativa o desempenho dos três métodos. Quesitos como número de iterações, tempo de execução, ponto ótimo encontrado, serão parâmetros para analisar um bom desempenho. Cada método em questão tem uma metodologia diferente para resolver o problema, assim através da análise é possível verificar como o método realiza a resolução do problema e identificar qual método tem melhor desempenho para o caso em específico. Para implementação dos métodos utiliza-se o software e linguagem de programação Matlab, onde se podem realizar execuções dos métodos simulando diversos tipos de situações a fim de analisar os métodos. Para a análise será utilizado um problema não linear clássico apresentado na bibliografia, a fim da possibilidade de visualizar e comprovar os resultados obtidos nas simulações dos métodos neste trabalho de pesquisa.

**Palavras-chaves:** Métodos Unidimensionais, Programação não linear, Resolução de Problemas.

### ABSTRACT

This research aims to analyze the unrestricted one-dimensional methods applied to solving problems of nonlinear programming (NLP). The methods discussed are the following: the golden section method, the method of bisection and Newton's method. (BAZARAA, 1993). Use the methods to solve a problem of nonlinear programming and analyze in evaluating and comparing the performance of three methods. Issues such as number of iterations, execution time, the optimal point found, will be a good parameter to analyze performance. Each method in question has a different methodology to solve the problem, so through the analysis is possible to see how the method performs the resolution of the problem and identify which method has better performance for the specific case. To implement the methods we use the software and programming language Matlab, which can be carried out executions of methods simulating various types of situations in order to examine the methods. Will be used to

analyze a nonlinear problem presented in classic literature, so the ability to view and verify the simulation results of the methods in this research work.

**Key-words:** Artificial Neural Networks, digit recognition, identification.

## INTRODUÇÃO

Os métodos básicos de otimização irrestrita são utilizados para minimizar/maximizar funções não lineares, ou melhor, encontrar o ponto mínimo global do problema. Entre estes métodos abordam-se os seguintes: o método da Seção Áurea, o método da Bisseção, o método de Newton. (BAZARAA, 1993), (GILAT, 2008).

Para facilitar a compreensão deste trabalho faz-se uma abordagem geral sobre o conceito de otimização, visando apresentar os aspectos teóricos e os algoritmos de cada um dos métodos implementados neste trabalho.

As técnicas de otimização aparecem com frequência em diversas áreas. Na economia, por exemplo, há um objetivo claro de maximizar os lucros de uma empresa, minimizar o custo de produzir um dado nível de produção. Na Medicina deseja-se obter o menor erro funcional para o problema inverso de tomografia por impedância elétrica, dentre outros.

Os problemas reais modelados como problemas de otimização geram funções e restrições que variam consideravelmente. Os problemas podem ser lineares ou não lineares, irrestritos ou restritos, unidimensionais ou multidimensionais e a busca pode ser pelo ótimo global ou pelo ótimo local. Resolver analiticamente um problema de otimização, muitas vezes, não é uma tarefa trivial, sendo preciso recorrer às técnicas iterativas e computacionais. (BUZBY, 1974), (NERY, 2007).

Existem diversas técnicas iterativas de otimização para os mais diversos tipos de problema, porém não existe uma técnica de propósito geral.

A formulação geral para um problema de otimização é (BAZARAA, 1993), (LUENBERGER, 1984):

$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.a. \\ x \in X, X \subset R^n \end{cases} \quad (1)$$

A função  $f(x)$  é conhecida por função objetivo e é função de  $n$  variáveis, “s.a.” é abreviação para “sujeito a”, restrições de igualdade ou desigualdade.

Se  $x \in R^n$ , então trata-se de um problema de otimização irrestrito. Grande parte dos métodos existentes na literatura para resolver esse tipo de problema apresenta a seguinte estrutura básica (BAZARAA, 1993), (DAVIDON, 1995):

- I. Escolha um ponto inicial  $x \rightarrow 0 \in X$  e faça  $k \leftarrow 0$ ;
- II. Determine uma direção factível de descida  $d_k$ , isto é:

Determine o valor ótimo de  $\alpha$ , resolvendo o problema de busca unidimensional:

III. Faça  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$  e verifique se  $x_{k+1}$  satisfaz alguma condição de otimalidade. Caso contrário faça  $k \leftarrow k + 1$  e volte ao passo II.

A solução procurada para o problema, ou ponto ótimo, é classificada como global (absoluto, relativo ao domínio todo) ou local (relativo a uma determinada região). A figura a seguir destaca alguns pontos importantes. O ponto P5 é um mínimo global, que é o ponto em que a função atinge seu menor valor absoluto entre todos os pontos do domínio; P4 e P6 são mínimos locais, ou seja, pontos de menor valor para a função em uma vizinhança finita e não nos extremos dessa vizinhança; P2 é ponto de máximo e P3; de inflexão. Já os pontos P1 e P7 são chamados de pontos de borda nos quais a derivada primeira não se anula, portanto não são pontos críticos da função objetivo. Porém, dependendo do problema em questão, por exemplo, nos problemas restritos, é necessário buscar o ponto ótimo na borda. (NERY, 2007).

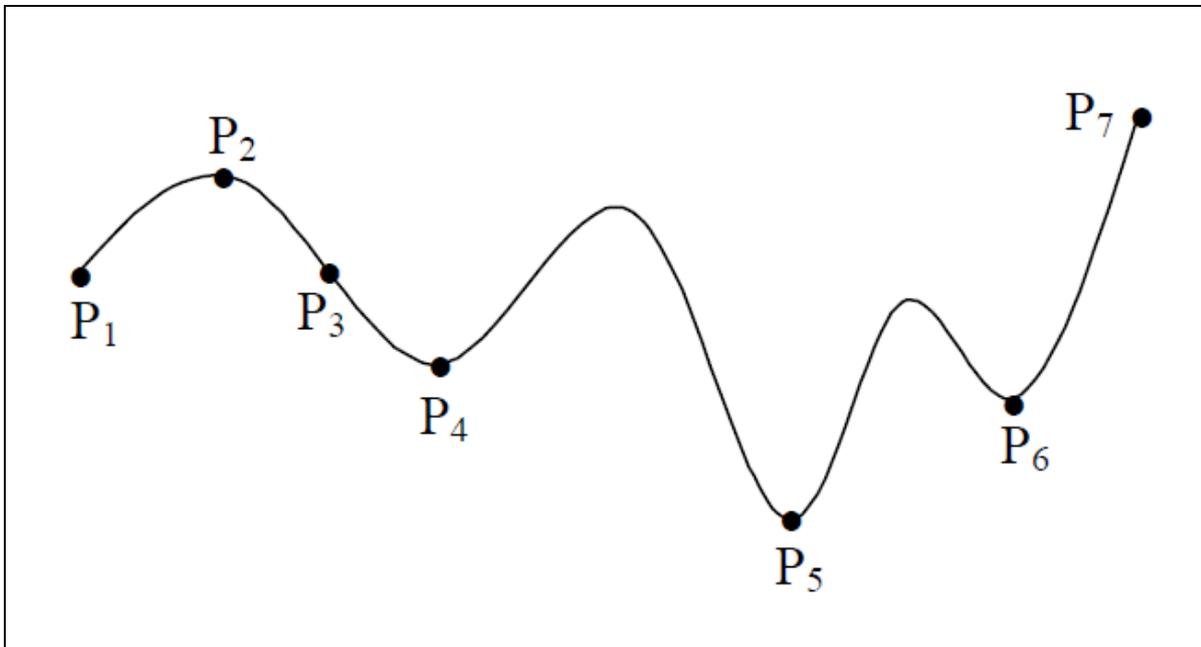


Figura 1: Ilustração de pontos extremos: P1 e P7: de borda, P2: máximo local, P3: inflexão, P4 e P6: mínimos locais e P5: mínimo global.

Por definição, uma função é dita ser convexa num espaço real se, para  $x_1, x_2$  pertencentes ao domínio e todo  $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ , a desigualdade for satisfeita, isto significa que, uma função é convexa se a região acima da curva é convexa, ou seja, dados quaisquer dois pontos acima da curva existe um segmento de reta que liga esses dois pontos e não corta a curva, conforme apresentado na figura 2. (NERY, 2007), (JACOBY, 1972).

Os métodos iterativos para otimização não linear, em geral, partem de um ponto inicial  $x_0$  e calcula por uma determinada regra uma sequência  $\{x_i\}$  que deve convergir no sentido de alcançar uma solução tão próxima quanto se queira e que o computador permita da solução ótima  $x^*$ . Os métodos existentes diferem entre si pela regra com que os novos pontos são calculados. Normalmente, o ponto  $x_{k+1}$  (solução da iteração  $k+1$ ) é obtido deslocando  $x_k$  (solução da iteração  $k$ ) uma distância  $\alpha_k$  na direção  $d_k$ , ou seja:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (2)$$

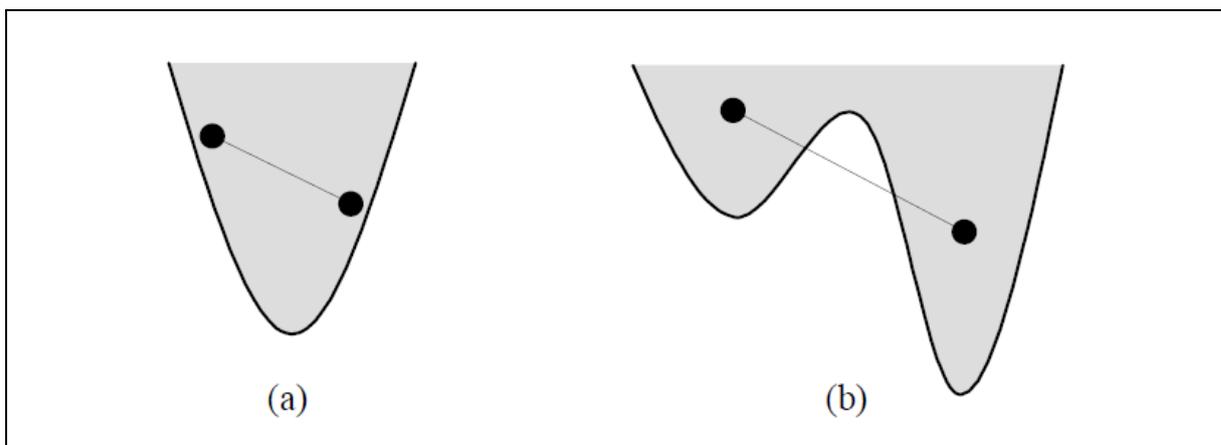


Figura 2: (a) Conjunto convexo, (b) Conjunto não convexo.

Na sequência apresentam-se os métodos unidimensionais irrestritos.

### Método da Seção Áurea

O método da seção áurea se baseia na redução do intervalo de incerteza inicial através de avaliações funcionais na proporção áurea ( $\approx 0,618$ ).

A seguir, o algoritmo da seção áurea: (BAZARRA, 1993).

I. Escolha a tolerância permitida para o comprimento do intervalo de incerteza  $\varepsilon > 0$ .  $[a_1, b_1]$  é o intervalo de incerteza inicial. Seja:

$$\lambda_1 = a_1 + (1 - \alpha)(b_1 - a_1) \quad (3)$$

$$\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1) \quad (4)$$

Onde  $\alpha \approx 0,618$ . Calcule  $\theta(\lambda_1)$  e  $\theta(\mu_1)$ .

II. Se  $(b_k - a_k) < \varepsilon$  então pare. A solução ótima encontra-se no intervalo de incerteza  $[a_k, b_k]$ .

Se  $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$  vá para o passo III. Caso contrário, se  $\theta(\lambda_k) < \theta(\mu_k)$  vá para o passo IV.

III. Defina o novo intervalo de incerteza com  $a_{k+1} = \lambda_k$  e  $b_{k+1} = b_k$ . Seja  $\lambda_{k+1} = \mu_k$  e  $\mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$ .  $\theta(\lambda_{k+1}) = \theta(\mu_k)$ . Calcule  $\theta(\mu_{k+1})$ .

IV. Defina o novo intervalo de incerteza com  $a_{k+1} = a_k$  e  $b_{k+1} = \mu_k$ . Seja  $\mu_{k+1} = \lambda_k$  e  $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$ .  $\theta(\mu_{k+1}) = \theta(\lambda_k)$ . Calcule  $\theta(\lambda_{k+1})$ .

A figura a seguir ilustra o funcionamento do método da seção áurea.

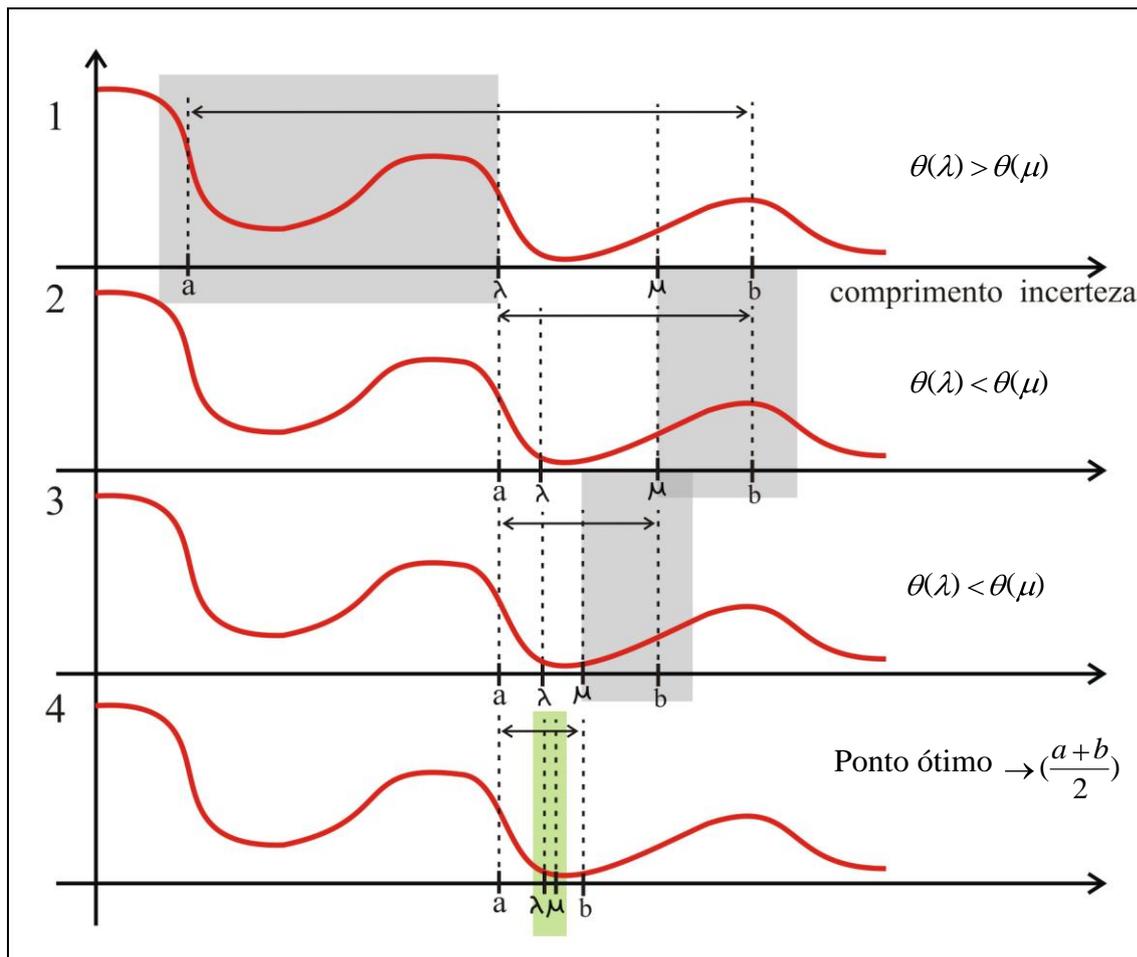


Figura 3: Iterações ilustrativas do método da seção áurea.

Como se pode observar na figura 3, o método da seção áurea calcula os valores ótimos  $\theta(\lambda_1)$  e  $\theta(\mu_1)$ , e assim através das relações entre eles atualiza-se o lado esquerdo quando  $\theta(\lambda_1) > \theta(\mu_1)$ , e  $\theta(\lambda_1) < \theta(\mu_1)$  para atualizar o lado direito, assim até que  $\lambda_1$  e  $\theta_1$  estejam no mesmo ponto estourando a tolerância, o ponto ótimo do problema.

**Método da Bisseção**

É um método para minimizar uma função genérica  $\theta(\lambda)$  de uma variável sobre um intervalo fechado e limitado.  $\theta(\lambda)$  é pseudo-convexa e; logo, diferenciável. Baseia-se na redução do intervalo de incerteza inicial usando as informações das derivadas primeiras. Segue o algoritmo do método da bisseção: (BAZARRA, 1993), (GILAT, 2008).

- I.  $[a_1, b_1]$  é o intervalo de incerteza inicial e  $\varepsilon$  é o comprimento máximo do intervalo de incerteza final.  $k=1$ . Calcule  $\theta'(\lambda_k)$ . Se  $\theta'(\lambda_k)=0$  então, pela pseudo-convexidade de  $\theta(\lambda)$ ,  $\lambda_k$  é um ponto de mínimo. Se  $\theta'(\lambda_k)>0$ , vá para o passo II. Caso contrário, se  $\theta'(\lambda_k)<0$  vá para o passo III.
- II. Como  $\theta'(\lambda_k)>0$ , então para  $\lambda > \lambda_k$  tem-se que  $\theta'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) > 0$  e pela pseudo-convexidade de  $\theta(\lambda)$  tem-se que  $\theta(\lambda) \geq \theta(\lambda_k)$ . O mínimo ocorre à esquerda de  $\lambda_k$ . Define-se, portanto o novo intervalo de incerteza  $[a_{k+1}, b_{k+1}] \equiv [a_k, \lambda_k]$ . Vá para o passo IV.

III. Como  $\theta'(\lambda_k) < 0$ , então para  $\lambda < \lambda_k$  tem-se que  $\theta'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) > 0$ , então  $\theta(\lambda) \geq \theta(\lambda_k)$ . O mínimo ocorre à direita de  $\lambda_k$ . O novo intervalo de incerteza é  $[\lambda_{k+1}, b_{k+1}] \equiv [\lambda_k, b_k]$ . Vá para o passo IV.

IV. Se  $(b_k - a_k) < \varepsilon$  então o mínimo é aproximado como sendo o ponto médio dos extremos do intervalo de incerteza.

A figura a seguir ilustra o funcionamento do método da Bisseção.

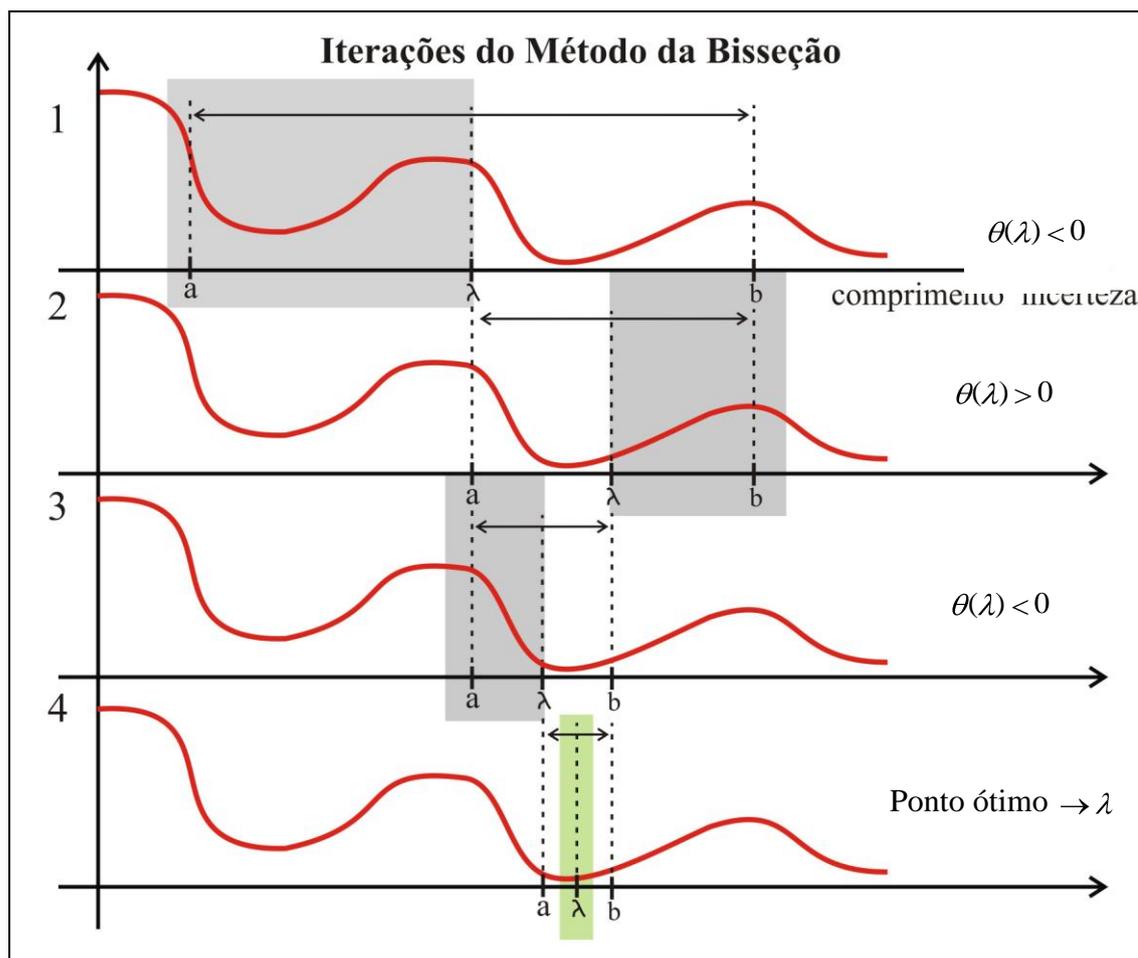


Figura 4: Iterações ilustrativas do método da bisseção.

Como se pode observar na figura 4, o método da bisseção calcula o valor  $\lambda = (a + b) / 2$ , ou seja, um ponto médio, após isso calcula-se o valor  $\theta(\lambda)$ , que é o valor do ponto médio na função. Assim utiliza-se  $\theta'(\lambda_k) < 0$  para atualizar o lado esquerdo e  $\theta'(\lambda_k) > 0$  para atualizar o lado direito, assim até que  $a$  e  $b$ , estejam no mesmo ponto estourando a tolerância, e sendo  $\lambda$  o ponto ótimo do problema.

### Método de Newton

O método de Newton baseia-se na aproximação quadrática da função  $q(\lambda)$  para um dado ponto  $\lambda_k$ . Tal aproximação é mostrada na equação (5). (BAZARRA, 1993), (NERY, 2007).

$$q(\lambda) = \theta(\lambda_k) + \theta'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) + \frac{1}{2}\theta''(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^2 \tag{5}$$

O ponto  $\lambda_{k+1}$  é assumido como sendo o ponto onde a derivada de  $q(\lambda)$  é nula. Isso produz  $\theta'(\lambda_k) + \theta''(\lambda_k)(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = 0$ . Daí, obtém-se a equação recursiva do método de Newton expressa em (6).

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{\theta'(\lambda_k)}{\theta''(\lambda_k)} \tag{6}$$

O processo termina quando  $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \varepsilon$  ou quando  $|\theta'(\lambda_k)| < \varepsilon$ . O método de Newton é aplicado apenas a funções duas vezes diferenciáveis. Além disso, o processo é bem definido somente se  $\theta''(\lambda_k) \neq 0$ .

A figura a seguir ilustra o funcionamento do método de Newton.

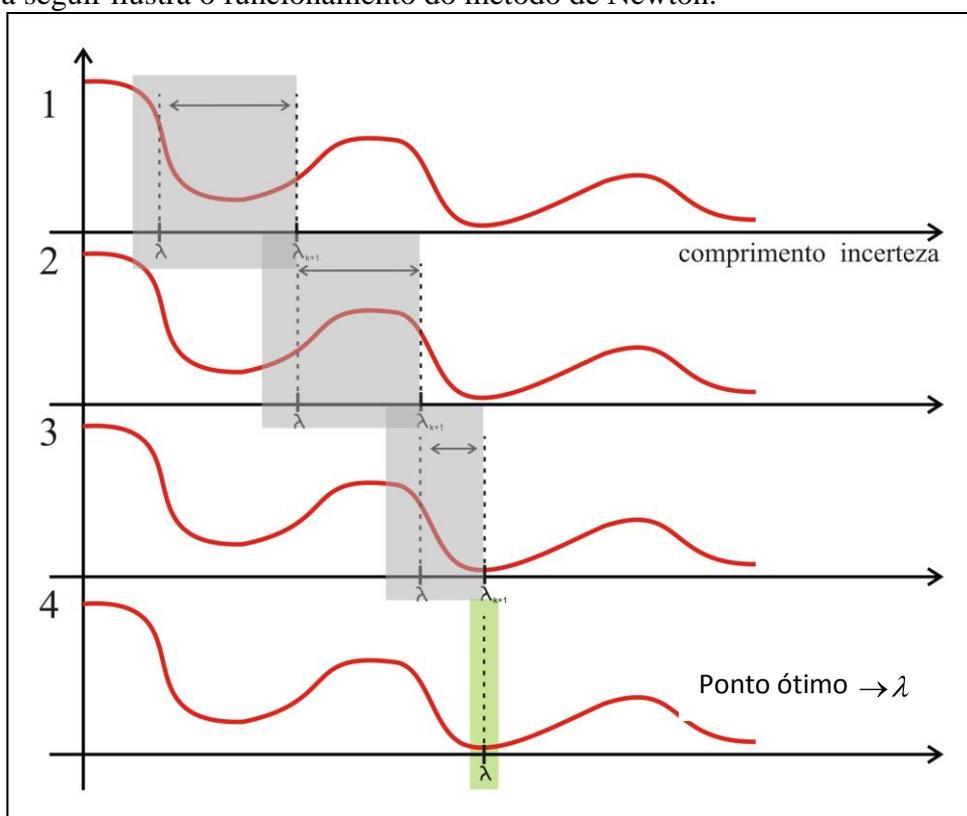


Figura 5: Iterações ilustrativas do método da bisseção.

Como se pode observar na figura 5, o método de Newton calcula o valor  $\lambda$  que é o ponto inicial, ou seja, a partir deste ponto o método caminha para a solução ótima calculando o próximo ponto  $\lambda_{k+1}$ , sempre a cada iteração calculando o gradiente das derivadas 1º e 2º da função e assim direcionando para a solução ótima. Então quando o gradiente estourar a tolerância estará no ponto ótimo  $\lambda$ , o ponto ótimo do problema.

## MATERIAL E MÉTODOS

Nesta fase do trabalho implementa-se os algoritmos de busca unidimensional, e observa-se o desempenho dos mesmos em relação a resolução do problema a seguir:

Considerar a função:

$$f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \quad (7)$$

A partir do ponto inicial  $x_0 = (1,1)$ , obter o valor ótimo do passo que minimiza a função ao longo da direção  $d_0$  dada por: (BAZARRA, 1993).

$$d_0 = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} \quad (8)$$

Assim através da análise dos métodos implementados, pode-se obter resultados considerando os aspectos teóricos e computacionais.

Então para resolver este problema por um método unidimensional é necessário transformar o problema multidimensional para um problema unidimensional. Este processo é apresentado a seguir:

Inicialmente obtém-se o gradiente da função  $f(x)$  através da fórmula (9). (BAZARRA, 1993).

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Portanto apresenta-se o gradiente da função  $f(x)$  :

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} (4x_1^3 - 24x_1^2 + 50x_1 - 4x_2 - 32) \\ (-4x_1 + 8x_2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

A partir de que temos o gradiente de  $f(x)$ , substituímos o ponto inicial  $x_0 = (1,1)$ , e obtemos a representação do valor do gradiente no ponto  $x_0$ :

$$\nabla f(x_k) = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Assim através da fórmula (12) identificamos o novo valor para o próximo ponto  $x_{k+1}$ :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \nabla f(x_k) \quad (12)$$

Então temos:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 6\alpha \\ 1 + 4\alpha \end{bmatrix} \quad (13)$$

E por fim temos a representação do problema multidimensional transformado em um problema unidimensional. A seguir apresenta-se o novo problema de programação não linear irrestrito que será utilizado para realizar a análise com os métodos.

$$\begin{cases} \min & f(x_{k+1}) = f(\alpha) = \boxed{1 - 6\alpha - 2} + \boxed{1 - 6\alpha - 2(1 + 4\alpha)} \\ \text{s.a.} & \alpha \in \mathcal{R}^1 \end{cases} \quad (14)$$

Onde  $\alpha$  é uma variável unidimensional simbólica.

A partir deste problema realizam-se as simulações com os métodos e assim faz-se uma análise em relação ao número de iterações, tempo de execução e desempenho do método na resolução do problema.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após aplicar a função anterior nos métodos de busca unidimensional temos os resultados expressos nas tabelas 1, 2 e 3 a seguir:

Tabela1: Resultados da simulação do método da Seção Áurea.

k	a(k)	b(k)	bk - ak	L(k)	M(k)	Teta(L(k))	Teta(M(k))
1	-10.0000	10.0000	20.0000	-2.3607	2.3607	31057.6238	54036.0416
2	-10.0000	2.3607	12.3607	-5.2786	-2.3607	890347.5685	31057.6238
3	-5.2786	2.3607	7.6393	-2.3607	-0.5573	31057.6238	76.4378
4	-2.3607	2.3607	4.7214	-0.5573	0.5573	76.4378	433.4605
5	-2.3607	0.5573	2.9180	-1.2461	-0.5573	2030.0727	76.4378
6	-1.2461	0.5573	1.8034	-0.5573	-0.1316	76.4378	0.7106
7	-0.5573	0.5573	1.1146	-0.1316	0.1316	0.7106	18.3268
8	-0.5573	0.1316	0.6888	-0.2942	-0.1316	10.0667	0.7106
9	-0.2942	0.1316	0.4257	-0.1316	-0.0311	0.7106	0.7578
10	-0.2942	-0.0311	0.2631	-0.1937	-0.1316	2.9294	0.7106
11	-0.1937	-0.0311	0.1626	-0.1316	-0.0932	0.7106	0.1305
12	-0.1316	-0.0311	0.1005	-0.0932	-0.0694	0.1305	0.1166
13	-0.0932	-0.0311	0.0621	-0.0694	-0.0548	0.1166	0.2574
14	-0.0932	-0.0548	0.0384	-0.0785	-0.0694	0.0881	0.1166
15	-0.0932	-0.0694	0.0237	-0.0841	-0.0785	0.0917	0.0881
16	-0.0841	-0.0694	0.0147	-0.0785	-0.0750	0.0881	0.0939
17	-0.0841	-0.0750	0.0091	-0.0806	-0.0785	0.0876	0.0881
18	-0.0841	-0.0785	0.0056	-0.0820	-0.0806	0.0885	0.0876
19	-0.0820	-0.0785	0.0035	-0.0806	-0.0798	0.0876	0.0875
20	-0.0806	-0.0785	0.0021	-0.0798	-0.0793	0.0875	0.0876
21	-0.0806	-0.0793	0.0013	-0.0801	-0.0798	0.0875	0.0875
22	-0.0806	-0.0798	0.0008	-0.0803	-0.0801	0.0875	0.0875

Resultado Aproximado: -0.08024 (Precisão: 1.0e-003). Valor da Função: 0.08753

Tabela 2: Resultados das simulações do método da Bisseção

k	a(k)	b(k)	(bk - ak)	L(k)	dteta
1	-10.0000	10.0000	20.0000	0.0000	52.0000
2	-10.0000	0.0000	10.0000	-5.0000	-587268.0000
3	-5.0000	0.0000	5.0000	-2.5000	-66808.0000
4	-2.5000	0.0000	2.5000	-1.2500	-7053.0000
5	-1.2500	0.0000	1.2500	-0.6250	-716.1250
6	-0.6250	0.0000	0.6250	-0.3125	-110.5781
7	-0.3125	0.0000	0.3125	-0.1563	-33.2441
8	-0.1563	0.0000	0.1563	-0.0781	0.9734
9	-0.1563	-0.0781	0.0781	-0.1172	-17.3095
10	-0.1172	-0.0781	0.0391	-0.0977	-8.5775
11	-0.0977	-0.0781	0.0195	-0.0879	-3.9189
12	-0.0879	-0.0781	0.0098	-0.0830	-1.5038
13	-0.0830	-0.0781	0.0049	-0.0806	-0.2732
14	-0.0806	-0.0781	0.0024	-0.0793	0.3481
15	-0.0806	-0.0793	0.0012	-0.0800	0.0370

Resultado Aproximado: -0.07996 (Precisão: 1.0e-003). Valor da Função: 0.0875

Tabela 3: Resultados das simulações do método de Newton

k	l(k)	d¹teta(k)	d²teta(k)	l(k+1)
1	1.0000	8652.0000	21560.0000	0.5987
2	0.5987	2586.9034	9502.1769	0.3265
3	0.3265	777.6064	4173.8109	0.1402
4	0.1402	232.6700	1856.0291	0.0148
5	0.0148	64.7734	904.0898	-0.0569
6	-0.0569	12.5792	579.5459	-0.0786
7	-0.0786	0.7516	512.7348	-0.0800
8	-0.0800	0.0029	508.7510	-0.0800

Resultado Aproximado: -0.08003 (Precisão: 1.0e-003). Valor da Função: 0.0875

Os resultados obtidos anteriormente são os resultados dos métodos da seção Áurea, método da Bisseção e método de Newton respectivamente, esses resultados foram obtidos a partir dos seguintes dados:

1. Limite inferior e superior:

$$a(k) = -10; b(k) = 10$$

2.  $\lambda$  inicial para o método de Newton:

$$\lambda(k) = 1$$

3. Função Objetivo

$$\min f(x_0) = f(\alpha) = \left[1 - 6\alpha - 2\right]^2 + \left[1 - 6\alpha - 2(1 + 4\alpha)\right]^2$$

4. Tolerância

$$\varepsilon = 0,001$$

A tabela a seguir mostra uma comparação entre o resultado obtido em todos os métodos:

Tabela 4: Resultados dos parâmetros para análise comparativa entre os métodos:

Método	Número de iterações	Tempo	Ponto ótimo $x^*$	$f(x)^*$
Seção Áurea	22	3,858 s	0.08753	0.08024
Bisseção	15	3,509 s	0,0875	0.07996
Newton	8	3,133 s	0,0875	0.08003

A figura a seguir ilustra como é a característica de convergência dos métodos em relação aos pontos iniciais: (BAZARRA, 1993), (GILAT, 2008), (NERY, 2007).

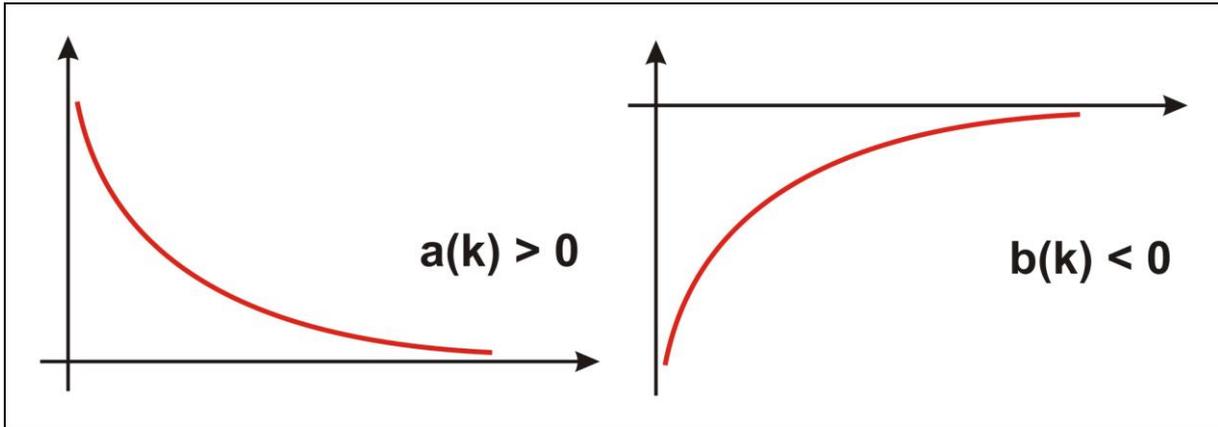


Figura 6: Característica de convergência dos métodos.

Como se conhece as características padrões de convergência dos métodos implementados, apresenta-se a seguir a convergência de cada um dos métodos para realização de uma análise. Nas Figuras 7, 8 e 9 apresentam-se os caminhos de convergência iteração a iteração dos métodos da seção Áurea, Bisseção e Newton.

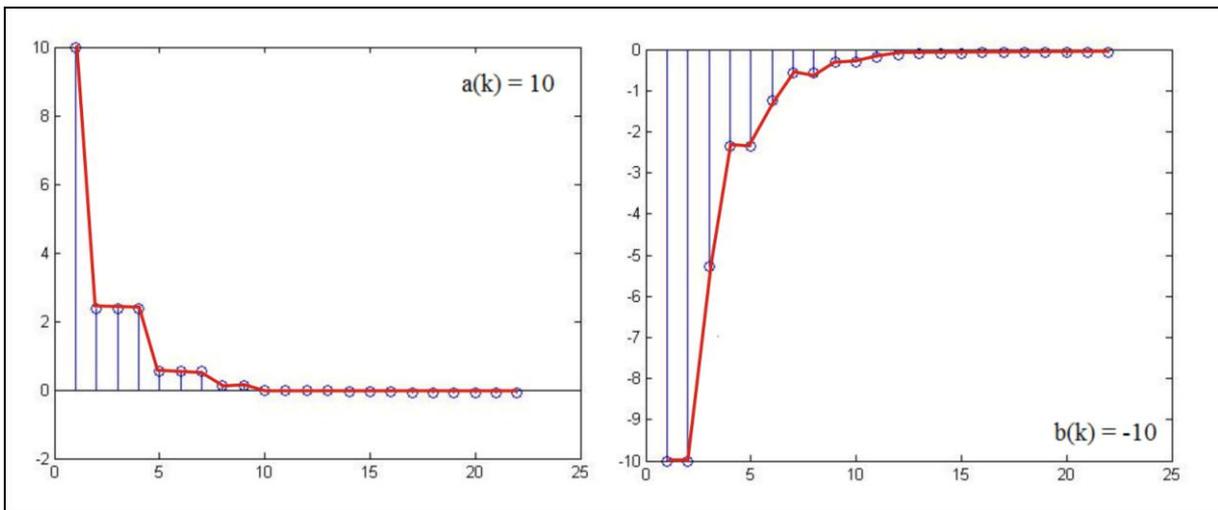


Figura 7: Caminho de convergência do método da Seção Áurea.

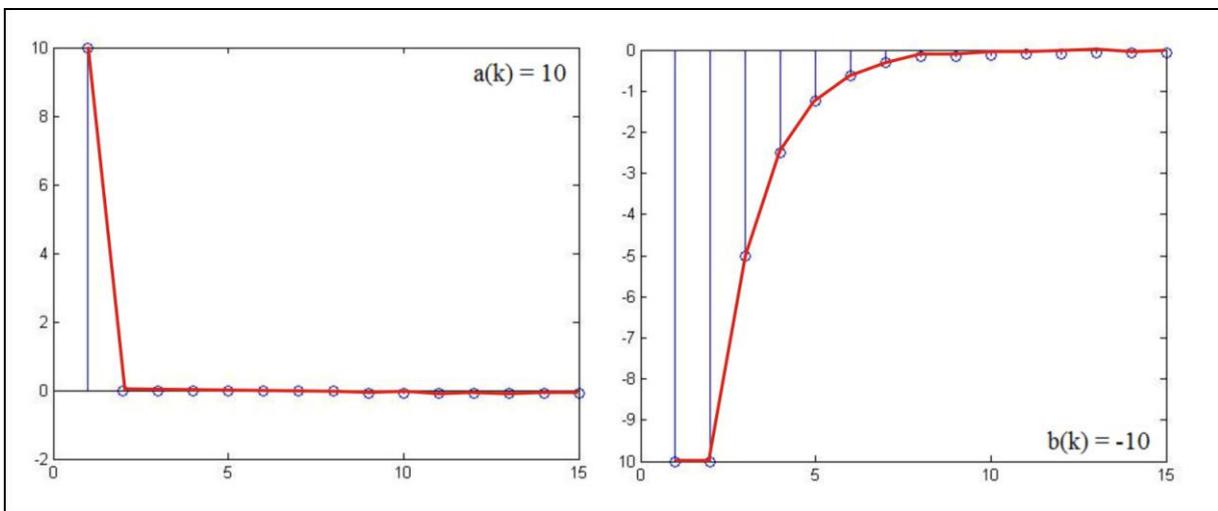


Figura 8: Caminho de convergência do método da Bisseção.

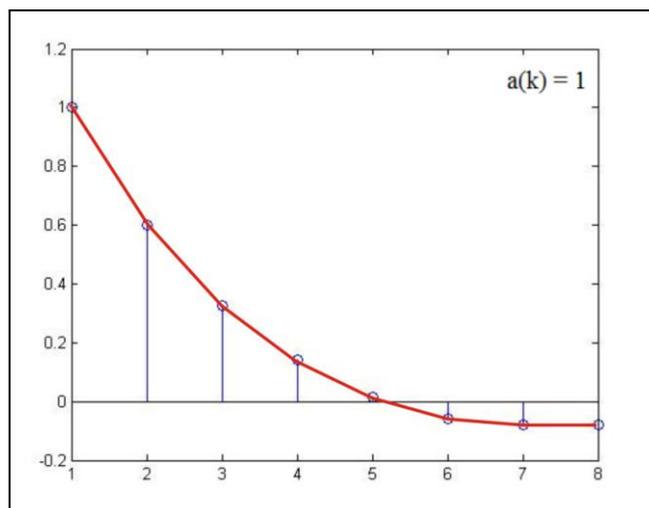


Figura 9: Caminho de convergência do método de Newton.

A partir dos resultados obtidos nas simulações dos métodos unidimensionais apresentados anteriormente pode-se fazer uma análise através de dois pontos de vista, o ponto de vista teórico e o ponto de vista computacional.

Aspecto Teórico: Através das referências bibliográficas pode-se concluir que os resultados obtidos nas simulações dos métodos são satisfatórios, pois o método de Newton tem uma convergência mais rápida, em seguida o método da Bisseção e por último o método da Seção Áurea. Isto porque o método de Newton utiliza a 1ª e 2ª derivada da função objetivo, tornando o espaço dimensional menor, e o método da Bisseção utiliza a 1ª derivada, também reduzindo o espaço, ao contrário do método da Seção Áurea que não utiliza nenhuma derivada. Assim os métodos que utilizam derivada nada mais fazem do que uma redução no espaço de busca assim diminuindo o número de iterações.

Observando-se os gráficos dos caminhos de convergência pode-se notar que os métodos são eficazes e que convergem com o valor inicial atribuído, as características de convergência dos métodos são semelhantes às características padrões para a convergência de um método unidimensional irrestrito.

Aspecto Computacional: Através das implementações pode-se concluir que os métodos podem ser implementados com facilidade, e que tem um bom desempenho, são problemas que exigem processamento do computador para executar cálculos em todas as iterações, porém os algoritmos se comportam bem convergindo em um pequeno espaço de tempo.

## CONCLUSÕES

Para este trabalho foram implementados diferentes métodos de otimização não linear, os chamados métodos unidimensionais irrestritos. Através das simulações foi possível obter resultados com dados de boa qualidade, onde foi possível fazer uma avaliação e comparação entre os métodos visando verificar desempenho e contribuição para o meio acadêmico.

A análise realizada compara os métodos de busca unidimensional (Seção Áurea, Bisseção e Newton), portanto através dos resultados obtidos pelos métodos na simulação realizada no Matlab pode-se dizer que o método de Newton é o que converge mais rápido, e assim intitulamos o mesmo como o melhor método de busca unidimensional implementado neste trabalho.

A justificativa para que este método seja intitulado como melhor é o fato do mesmo utilizar a 1º e 2º derivada da função, proporcionando assim uma redução no tamanho do espaço onde se esta trabalhando fazendo com que seja encontrado mais rápido o ponto ótimo, em outras palavras quando se deriva um espaço n-dimensional temos um espaço n-1 dimensões, tornando assim o espaço menor.

Existem algumas exceções no caso de se empregar o método de Newton, quando a função não for derivável de segunda ordem não é possível aplicar o método, pois a função vai ser constante.

Em todas as simulações é percebido de forma nítida a sensibilidade que apresentam os métodos implementados sobre a escolha de parâmetros, os erros de arredondamento e os grandes tempos computacionais requeridos para a solução dos problemas. Assim o que pode afetar a boa execução dos métodos são os parâmetros empregados nos métodos.

Então podem-se observar nas figuras ilustrativas dos caminhos de convergência que os métodos tem características seguras de convergência e para que isso aconteça deve existir uma diferença entre  $[a, b]$ , ou seja, sem um intervalo não existe convergência, e a escolha do ponto inicial é fundamental para o bom desempenho dos métodos.

Devido aos resultados obtidos e a análise do comportamento dos algoritmos implementados, pode-se concluir que todos os métodos são bons cada um com sua especificação e que este trabalho possibilita uma visualização dos problemas ou agravamentos que pode ocorrer na resolução de problemas não lineares.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus, as nossas famílias, e por fim um especial agradecimento a CAPES pelo apoio (concessão de bolsa de Mestrado).

## REFERÊNCIAS

BAZARAA, MOKHTAR S.; SHERALI, HANIF D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear programming: theory and algorithms**, 2. Ed – Nova Iorque – Wiley – 1993.

BUZBY. B. R. **Techniques and experience solving really big nonlinear programs, Optimization Methods**, English Universities Press – London – 1974.

DAVIDON, W.C. **Variance Algorithm for Minimization**, Computer J – 406 – 410 – 1995.

GILAT, A; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para Engenheiros e Cientistas**, Porto Alegre – Bookman – 2008.

JACOBY, S. L. S.; KOWALIK, J. S.; PIZZO, J. T. **Iterative Methods for nonlinear optimization problems**. Prentice-Hall – 1972.

LUENBERGER, D. G. **Introduction to Linear and Nonlinear Programming**, Addison – Wesley – 1984.

NERY, R. S. **Métodos Híbridos para resolução de problemas de programação não linear**, Universidade de São Paulo – USP – Monografia curso de matemática aplicada a negócios – 2007.