Introdução a teoria wavelet

Introduction the wavelet theory

Wendel Cleber Soares
Doutorando em Engenharia Elétrica, FEIS - UNESP – Ilha Solteira e professor da FAI

Marco Aparecido Queiroz Duarte
Prof. Doutor Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS – Cassilândia - MS

Resumo

O uso de funções wavelets em aplicações nas mais variadas áreas tem se tornado cada vez mais freqüente. Por isso, trabalhos que tratam a teoria wavelet e suas aplicações são sempre atraentes para que mais pessoas possam entender o porquê de tantas aplicações com estas funções e ao mesmo tempo sintam-se motivadas a buscar novas aplicações usando wavelets. Neste trabalho são apresentados os fundamentos da teoria wavelet, as transformadas wavelet contínua e discreta, unidimensional e bidimensional, os pacotes wavelets, a interpretação da transformada wavelet como uma operação de filtragem e suas aplicações no processamento de sinais unidimensionais e bidimensionais. O objetivo deste trabalho é apresentar as ferramentas usadas na teoria wavelet.

Palavras-chave: Wavelets. Transformada Wavelet. Processamento de Sinais.

Abstract

The use of wavelet functions in applications in the most varied areas has become more and more frequent. Therefore, works about the wavelet theory and their applications are always attractive so that more people can understand the reason of so many applications with these functions and at the same time be motivated to look for new applications using wavelets. In this healthy work are presented the foundations of the wavelet theory, transformed continuous and discreet wavelet, one-dimensional and two-dimensional, the packages wavelets, the interpretation of the transformed wavelet as a filtrate operation and their applications in one-dimensional and two-dimensional processing of signals. The objective of this work is to present the tools used in the wavelet theory.

Keywords: Wavelets. Transformed Wavelet. Processing of Signals.

Introdução

O primeiro registro do termo “wavelet” data de 1909, em uma tese de Alfred Haar (1910), que apresentou uma função que décadas depois viria a ser conhecida como a primeira função wavelet. O conceito wavelet, em sua forma teórica atual, foi proposto em meados dos anos oitenta por Jean Morlet (geofísico), Yves Meyer (matemático) e a equipe do Centro de Física Teórica de Marseille, trabalhando sob orientação de Alex Grossman (físico teórico) na França. Os métodos de análise wavelet foram desenvolvidos principalmente por Yves Meyer (1993) e seus colegas, que asseguraram a sua disseminação. A atenção da comunidade de processamento de sinais foi atraída quando Ingrid Daubechies (DAUBECHIES, 1998; DAUBECHIES, 1992; DAUBECHIES, 1990) e Stephane Mallat (MALLAT, 1989a; MALLAT, 1989b), além de suas contribuições para a teoria wavelets, estabeleceram a conexão entre os dois assuntos e obtiveram resultados via processamento de sinal discreto. O algoritmo de Mallat (1989a) pode ser considerado um marco na área de processamento de sinais. Desde então, a pesquisa em wavelets tornou-se difundida internacionalmente. Tal pesquisa encontra atividade relevante, particularmente nos Estados Unidos, e vem sendo relatada nos trabalhos de cientistas como Ingrid Daubechies (1998), Ronald Coifman e Victor Wickerhauser (COIFMAN et al., 1990a; COIFMAN, 1990b; COIFMAN; WICKERHAUSER, 1993; RIOUL; VETTERLI, 1991) entre outros.

Wavelets

Seja $L^2(R)$ o espaço das funções de quadrado integrável ou ainda o espaço das funções de energia finita, isto é finita, isto é $\psi(t) \in L^2(R)$, se então

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 \, dt < \infty \qquad (1)$$

Definição: Uma função $\psi(t) \in L^2(R)$ é denominada wavelet se, e somente se, sua Transformada de Fourier $\hat{\psi}(\omega)$ satisfaz

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \, d\omega < \infty \qquad (2)$$

A condição anterior, equação (2), é chamada de condição de admissibilidade (DAUBECHIES, 1992). Segue da condição de admissibilidade que $\lim_{\omega \to 0} \hat{\psi}(\omega) = 0$. Assim, se $\hat{\psi}(\omega)$ é contínua, então $\hat{\psi}(0) = 0$, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \, dt = 0. \qquad (3)$$

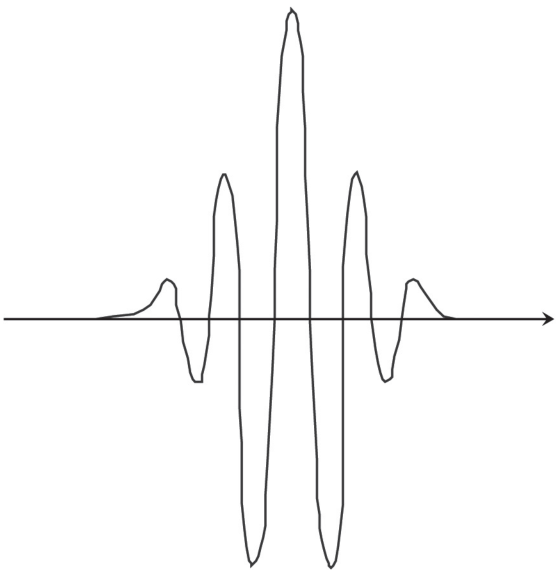

Figura 1: Gráfico de uma Wavelet.

Geometricamente a equação (2) estabelece que o gráfico de $\psi(t)$ deve oscilar de modo a cancelar as áreas negativas a fim de anular a integral. Portanto, o gráfico de $\psi(t)$ tem a forma de uma onda, conforme ilustra a Figura 1, que é um exemplo de wavelet.

Como $\psi(t) \in L^2(R)$ então $\lim_{t \to \pm\infty} \psi(t) = 0$ e, como ψ deve estar bem localizada no tempo, este decaimento deve ser muito rápido. Assim, ela terá forma de uma onda muito pequena.

Transformada Wavelet Contínua (CWT)

A transformada wavelet é uma operação linear que decompõe uma função em um conjunto de funções especiais chamadas wavelets. As wavelets são funções resultantes da atuação simultânea de duas operações (escalamento e translação) numa única função, denominada wavelet "mãe".

A função wavelet mãe

Matematicamente, uma função $\psi(t)$ para ser considerada uma wavelet mãe, deve pertencer ao espaço $L^2(R)$ e satisfazer a equação (3).

Sem muito rigor matemático, uma wavelet mãe é uma função que oscila, tem energia finita e valor médio nulo.

Geralmente, a função wavelet mãe recebe o nome de seu criador e atualmente, existem inúmeras wavelets mãe dentre as quais as mais conhecidas são wavelets de Daubechies, Meyer, Lemarié, Haar, Morlet. Porém, várias wavelets têm surgido nos últimos tempos, pois é possível construir uma wavelet de acordo com a aplicação que se deseja.

Definição da Transformada Wavelet Contínua

Supondo que $\psi(t)$ seja uma wavelet mãe, a transformada wavelet contínua de uma função $x(t) \in L^2(R)$ com relação à wavelet mãe $\psi(t)$ é dada por:

$$(W_\psi x)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \qquad (4)$$

com a e b $\in R \, (a \neq 0)$.

Na equação (4), "*" é o conjugado complexo; a, o parâmetro de escala; b, o parâmetro translação e t, o tempo.

As wavelets filhas

A idéia fundamental na teoria wavelet é a operação escalamento realizada pelo parâmetro a. O escalamento possibilita a compressão (a < 1) ou dilatação (a > 1) da função wavelet mãe $\psi(t)$.

A wavelet mãe quando escalada e deslocada no tempo (translação) origina as wavelets ou wavelets "filhas":

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad (5)$$

O termo: $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ torna a energia das wavelets filhas a mesma da wavelet mãe.

Transformada Wavelet Contínua Inversa

De acordo com Young (1995), a transformada wavelet é uma operação de ruptura. Seguindo seu raciocínio, a transformada wavelet "quebra" uma função em muitos pedaços e estes pedaços são representados pelos coeficientes wavelet $(W_\psi\, x)(a,b)$

Os coeficientes wavelet representam a semelhança entre a função x(t) e as wavelets filhas e quanto maior a semelhança, maior será o valor do coeficiente wavelet (LIMA, 2004). O conjunto de todos os coeficientes wavelet constitui a representação da função x(t) no domínio wavelet.

Se o sinal x(t) for decomposto usando uma wavelet ψ que satisfaz a condição de admissibilidade, então é possível reconstruir o sinal através da transformada wavelet inversa conforme a equação (6).

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{(W_\psi\, x)(a,b)\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\}\frac{da\,db}{a^2} \qquad (6)$$

Observa-se da equação (6) que o mesmo núcleo: $\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ é utilizado na transformada wavelet contínua e em sua inversa.

De acordo com Daubechies (1992), a equação (6) pode ser vista de dois modos diferentes:

- um modo de reconstrução de x(t) , desde que sua transformada wavelet inversa seja conhecida;
- um modo de representação de x(t), como uma superposição de wavelets filhas.

Tranformada Wavelet Discreta – (DWT)

Embora a transformada wavelet contínua seja de grande interesse teórico, principalmente para a derivação e compreensão das propriedades matemáticas das funções wavelets, a sua discretização é necessária para aplicações práticas.

A necessidade de discretização é resultante da redundância presente na equação (5) já que os parâmetros a, b da transformada variam continuamente. O processo de discretização origina a transformada wavelet discreta.

Na transformada wavelet discreta apenas os parâmetros da transformada são discretizados, ou seja, o parâmetro de escala a e o parâmetro de translação b. De acordo com a literatura, uma discretização típica é do tipo:

$$a = a_0^m \qquad (7)$$

$$b = n a_0^m b_0 \qquad (8)$$

com m e $n \in Z$, $a_0 > 1$ e $b_0 \neq 0$.

Deste modo, tem-se a transformada wavelet discreta:

$$(W_\psi\, x)(m,n) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\psi\left(\frac{t - n a_0^m b_0}{a_0^m}\right)dt \qquad (9)$$

Destas equações observa-se:

- a transformada wavelet discreta é definida apenas para valores de escalas positivos ($a_0 > 1$);
- o passo da translação é proporcional a escala ($b = n a_0^m b_0$);
- a transformada wavelet discreta produz um

conjunto finito de coeficientes wavelet $(W_y \; x)(m,n)$;

• o processamento é realizado sobre tempo contínuo.

Transformada Wavelet Discreta Inversa – (DWTI)

No caso contínua, dada uma função wavelet mãe, uma função qualquer x(t) pode sempre ser recuperada do seu conjunto de coeficientes wavelet contínuos. No caso discreto, entretanto, o processo de reconstrução pode não convergir para a função x(t). A reconstrução depende da escolha da wavelet mãe e do processo de discretização realizado.

De acordo com Daubechies (1992), a reconstrução ideal seria aquela que ocorresse com o máximo de eficiência e com um mínimo de perda de informação. Neste sentido, a função x(t) pode ser reconstruída dos seus coeficientes wavelet discretos com uma aproximação razoavelmente boa por:

$$x(t) \approx c \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((W_\psi \, x)(m,n))(\psi_{m,n}(t)) \qquad (10)$$

sendo, c uma constante que depende do processo de discretização e da wavelet mãe utilizada.

Transformada Wavelet: uma interpretação do ponto de vista de processamento de sinais

A transformada wavelet aproxima uma função qualquer através de uma base de funções ortonormais que, diferentemente da transformada de Fourier, não precisam ser funções com duração infinita (ao contrário das funções seno e cosseno). Sua interpretação ficou mais fácil após os estudos de Daubechies (1998; 1990), que propôs uma implementação através de filtros do tipo FIR (Resposta ao Impulso Finita).

A Figura 2 apresenta um exemplo de Transformada Wavelet Discreta (DWT) com dois níveis. O sinal de entrada, denominado de s[n], é passado por dois filtros: o primeiro representa um filtro passa-baixas, com resposta ao impulso hLP[n], e o segundo representa um filtro passa-alta, com resposta ao impulso gHP[n]. Após a filtragem, os sinais passam por uma dizimação no tempo (no caso, uma sub-amostragem de ordem 2), gerando as saídas c1[n], que representa as componentes de baixa freqüência, e d1[n], que representa as componentes de alta freqüência. Do ponto de vista matemático, c1[n] contém os chamados coeficientes de aproximação e d1[n] os coeficientes de detalhes.

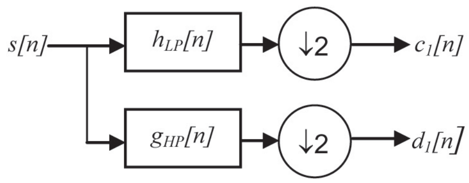

Figura 2: Decomposição de um sinal em duas faixas.

Considerando um sinal de entrada real, as equações que expressam as relações entre s[n], c1[n] e d1[n] são:

$$c_1[k] = \sum_n h[n-2k].s[n] \qquad (11)$$

$$d_1[k] = \sum_n g[n-2k].s[n] \qquad (12)$$

A partir do sinal c1[n] podem ser obtidas mais duas faixas, e assim sucessivamente, com o processo sendo finalizado quando o comprimento do último sinal cL[n] é um. O número de níveis e de faixas que pode ser obtido é proporcional ao comprimento do sinal a ser processado. Definindo N como sendo o tamanho da seqüência de entrada, o número máximo de níveis e faixa será L=log2N (RIOUL; VETTERLI, 1991), o que exige um sinal de entrada com comprimento em potência de 2. As várias faixas podem ser vistas como um banco de filtros do tipo passa-faixa.

A reconstrução do sinal é feita através de um processo inverso, ou seja, é feita uma sobreamostragem, uma filtragem e uma combinação final das várias faixas (RIOUL; VETTERLI, 1991).

Wavelet Packet

O método Wavelet Packet é uma generalização da decomposição wavelet que oferece uma rica troca de possibilidades para análise de sinais. Na Análise Wavelet, um sinal é decomposto em coeficientes de aproximação e detalhes. A aproximação é então, por si só, decomposta dentro de um segundo nível de aproximação e detalhes, e o processo é repetido. Para n níveis de decomposição, existem n+1 possíveis caminhos para decompor ou codificar o sinal.

Na Wavelet Packet, os detalhes, bem como as aproximações podem ser decompostos. Isto rende 2n diferentes caminhos para codificar os sinais. Segue abaixo uma árvore de representação de uma decomposição usando Wavelet Packet:

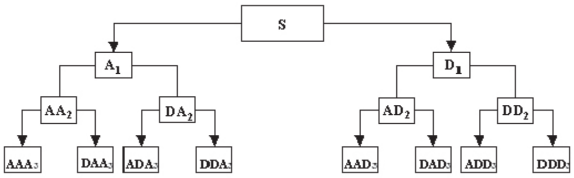

Figura 3: Decomposição Wavelet Packet.

Transformada Wavelet Discreta Unidimensional (DWT Unidimensional)

A DWT unidimensional (também chamada de decomposição wavelet) de um sinal é a representação de um único coeficiente da média geral do sinal original, seguido dos coeficientes de detalhes em ordem decrescente de resolução.

A forma que se calcula a DWT unidimensional, recursivamente, através da média e diferença entre os coeficientes, é chamada de banco de filtros. Nenhuma informação é acrescentada ou perdida neste processo. O sinal original e a sua transformada têm a mesma quantidade de coeficientes. Desta forma, dada a transformada, pode -se reconstruir o sinal em qualquer resolução, adicionando e subtraindo recursivamente os coeficientes de detalhes das versões de resoluções mais baixas.

O armazenamento da DWT unidimensional de um sinal, em vez da própria imagem, tem um número de vantagens. Uma delas é que geralmente um grande número de coeficientes de detalhes torna-se muito pequeno em magnitude. Desta forma, truncando ou removendo estes pequenos coeficientes da representação, introduz apenas pequenos erros no sinal reconstruído, dando uma forma de compressão de sinal com perda.

Transformada Wavelet Discreta Bidimensional (DWT Bidimensional)

Existem duas formas comuns nas quais as wavelets podem ser usadas para transformar os valores dos pixels dentro de uma imagem. Cada uma destas transformações é uma generalização bidimensional da DWT unidimensional.

A primeira transformada é chamada de decomposição padrão. Para obter a decomposição padrão de uma imagem, aplica-se primeiro a DWT unidimensional a cada linha de valores de pixels. Esta operação resulta em um valor médio para cada linha. Feito isto, trata-se estas linhas transformadas como se elas fossem uma imagem e aplicamos a DWT unidimensional para cada coluna. Os valores resultantes são todos coeficientes de detalhes, exceto por um único coeficiente que representa a média geral.

O segundo tipo de DWT bidimensional, chamado de decomposição não padrão, realiza operações alternadas entre linhas e colunas. Primeiro aplica-se o cálculo da média nos pares horizontais e faz-se a diferença dos valores dos pixels em cada linha da matriz que representa a imagem. Depois, aplica-se o cálculo da média nos pares verticais e encontra-se a diferença para a coluna do resultado. Para completar a transformação, repetem-se este processo recursivamente apenas no quadrante contendo as médias em ambas as direções.

Compressão Wavelet

A representação de um sinal no domínio wavelet tem sua energia concentrada em poucos coeficientes, significando que vários coeficientes têm valor absoluto muito próximo de zero, de forma que a eliminação desses coeficientes não compromete a reconstrução do sinal pela transformada wavelet inversa. A compressão wavelet se baseia na eliminação destes coeficientes (LOUIS; MAAB; RIEDER, 1998).

Para efetuar a compressão, primeiro deve-se determinar um valor limite, que geralmente é calculado de acordo com as propriedades estatísticas do sinal (DONOHO; JOHNSTONE, 1994). A seguir, faz-se a comparação entre todos os coeficientes do sinal no domínio wavelet e o valor limite. Os valores que estão abaixo do limite são eliminados e os que estão acima são mantidos. Este é um método de compressão por perda, chamado de limiar duro, hard thresholding, proposto em (DONOHO; JOHNSTONE, 1994). Assim, se Y é a representação de um sinal no domínio wavelet, sua compressão é feita de acordo com a equação (17):

$$\hat{Y} = \begin{cases} Y, & se \quad |Y| > \lambda \\ 0, & se \quad |Y| \leq \lambda \end{cases} \qquad (17)$$

sendo λ o valor de limite calculado.

A compressão de uma imagem pode ser feita aplicando a equação (17) em cada linha da matriz que representa esta imagem (STOLLNITZ; DEROSE; SALESIN, 1996).

Redução de Ruído

A redução de ruído em sinais de qualquer dimensão é importante, devido ao fato de que, em aplicações práticas, a maioria dos sinais são obtidos em ambientes ruidosos. Por isso, para a análise destes sinais é necessário que, primeiro, se faça a eliminação ou redução (atenuação) ao máximo do ruído presente.

A distinção entre sinais e ruídos depende do modelo real do sinal medido, em outras palavras, a relação assumida entre o sinal e o fenômeno apresentado pelo sinal. Assim, dependendo da natureza do ruído e do sinal, existem vários métodos para eliminar ou atenuar ruídos (LOUIS; MAAB; RIEDER, 1998).

Uma forma simples de redução de ruído se baseia na equação (17), porém, neste caso, além do limite λ, deve-se levar em consideração também a potência do ruído, criando assim um novo parâmetro, β E, na equação (17), λ é trocado por $\beta\lambda$ Caso contrário, teria apenas uma eliminação de redundâncias.

Bibliografia

COIFMAN, R., MEYER Y., QUAKE, S. e WICKERHAUSER, M.V. **Signal processing and compression with wavelets packets,** preprint, Yale University, New Haven, CT, 1990a.

COIFMAN, R. A**dapted multiresolution analysis, computation, signal processing and operator theory,** ICM 90, Kyoto, Japan, Springer-Verlag, 1990b.

COIFMAN, R., WICKERHAUSER, M. V. **Wavelets and adapted waveform analysis: A Toolkit for Signal Processing and Numerical Analysis,** A.K. Peters Ltda., MA, 1993.

DAUBECHIES, I. **Othonormal bases of compactly supported wavelets,** Communications on Pure and Applied Mathematics XLI, p. 909-996, 1998.

DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets,** Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pensylvania, 1992.

DAUBECHIES, I. **The wavelet transform, time frequency localization and signal analysis**, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. 36, p. 961-1005, 1990.

DONOHO, D. L., JOHNSTONE, I.M. I**deal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage**, Biometrika, v. 81: n. 3, p. 425-455, 1994.

HAAR, A. **Zur Theorie der Orthogonalen Functionen-Systeme**, Mathematische Annalen, 69, p. 331-371, 1910.

LOUIS, A. K., MAAB, P. e RIEDER, A. **Wavelets Theory and Applications,** John Wiley & Sons, 1998.

MALLAT, S. **A theory for multiresolution representation signal decomposition: the wavelet representation.** IEEE Transaction Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11(7), p. 674-693, 1989a.

MALLAT, S. **Multiresolution approximation and wavelets,** Trans. Amer. Math. Soc., 315, p. 69-88, 1989b.

MEYER, Y. **Wavelets: Algorithms and Applications,** SIAM, Philadelphia, 1993.T.

RIOUL, O. and VETTERLI, M. **Wavelets and Signal Processing,** IEEE Signal Processing Magazine, 8(4), p. 14-38, 1991.

STOLLNITZ, E. J., DEROSE, T. D., SALESIN, D. H. **“Wavelets for Computer Graphics Theory and Applications,** Morgan Kaufmann Publishers, Inc. San Francisco, California, 1996.

YOUNG, R. K. **Wavelet Theory and its Applications,** Kluwer Academic Publisher, 1995.